Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Test di GEOMETRIA del 18.11.2014

---

1. Determinare le radici terze del numero complesso $z = 1 + i$.

Nel piano di Gauss il numero complesso $z = 1 + i$ è rappresentato dal punto $P(1,1)$, pertanto il suo modulo è pari a $\sqrt{2}$ ed il suo argomento è l'angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Si ha

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

Sia $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ tale che $w^3 = z$, allora

$$r^3 = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[6]{2}$$

$$3\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi + 8k\pi}{12}, \quad k = 0, 1, 2,$$

Cioè

$$\theta_0 = \frac{\pi}{12}, \quad \theta_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad \theta_2 = \frac{17}{12}\pi.$$

Infine le radici terze di z sono i numeri complessi

$$w_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}), w_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi), w_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi).$$

2. Dopo aver verificato che l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z) = (x - y + z, x - z, x + 2y),$$

è invertibile, individuarne l'inversa.

L'applicazione è invertibile se lo è la sua matrice rispetto ad una qualunque base fissata per $\mathbb{R}^3$. Consideriamo la base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$, allora

$$L(1,0,0) = (1,1,1) = 1e_1 + 1e_2 + 1_3,$$

$$L(0,1,0) = (-1,0,2) = -1e_1 + 0e_2 + 2e_3,$$

$$L(0,0,1) = (1,-1,0) = 1e_1 - 1e_2 + 0e_3.$$

Poichè

$$D(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(L)) = D\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 5,$$

l'applicazione risulta invertibile. Per determinarne l'inversa risolviamo il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x - z = b \\ x + 2y = c \end{cases}$$

il quale ammette la soluzione $(\frac{2a+2b+c}{5}, \frac{-a-b+2c}{5}, \frac{2a-3b+c}{5})$.
Infine

$$L^{-1}(x,y,z) = (\frac{2x+2y+z}{5}, \frac{-x-y+2z}{5}, \frac{2x-3y+z}{5}).$$

3. Considerate in $\mathbb{R}^3$ le basi

$$B = \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,2)\}, \quad B' = \{(1,0,0),(0,1,-1),(0,1,0)\},$$

determinare la matrice del cambiamento di base $A = M_{B'}^{B}(id)$. Determinare inoltre l'applicazione lineare indotta da tale matrice $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Si devono esprimere i vettori della base B sulla base B' :

$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,-1) + 1(0,1,0),$$

$$(1,-1,0) = 1(1,0,0) + 0(0,1,-1) - 1(0,1,0),$$

$$(0,0,2) = 0(1,0,0) - 2(0,1,-1) + 2(0,1,0).$$

Allora

$$A = M^{B}_{B'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$L_A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y, -2z, x-y+2z).$$

4. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ x - 2z = k \\ kx + y = 2k \end{cases},$$

al variare del parametro reale k.

La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 1 & 0 & -2 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale $3k+2$. Allora per tutti i valori reali di k escluso $k = -\frac{2}{3}$ il sistema è di Cramere ed ammette l'unica soluzione

$$\left(\frac{D\begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ k & 0 & -2 \\ 2k & 1 & 0 \end{pmatrix}}{3k+2}, \frac{D\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & -2 \\ k & 2k & 0 \end{pmatrix}}{3k+2}, \frac{D\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ k & 1 & 2k \end{pmatrix}}{3k+2}\right).$$

Nel caso $k = -\frac{2}{3}$ la matrice A diviene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ha rango evidentemente 2, mentre la matrice completa

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ \\ 1 & 0 & -2 & -\frac{2}{3} \\ \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

ha rango 3, fornito dalle prime due colonne e dalla quarta. In base al Teorema di Rouche-Capelli il sistema non ammette in questo caso soluzioni.