Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Prova scitta di GEOMETRIA del 18.11.2019

---

1. Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

essendo

$$B = \{(1,1,0),(1,0,-1),(3,0,0)\}, \quad B' = \{(1,1,1),(2,-1,0),(0,0,-2)\}.$$

Se $v = (2,3,1)$, determinare $L(v)_{\mathcal{B}'}$.

Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$(x,y,z) = y(1,1,0) - z(1,0,-1) + (\frac{x-y+z}{3})(3,0,0),$$

cioè $(x,y,z)_B = (y, -z, \frac{x-y+z}{3})$. Allora

$$L(x,y,z)_{B'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -z \\ \frac{x-y+z}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= (\frac{x+5y+z}{3}, x-2y+z, \frac{x+2y+4z}{3}).$$

Segue che:

$$L(x,y,z) = \frac{x+5y+z}{3}(1,1,1) + (x-2y+z)(2,-1,0) + \frac{x+2y+4z}{3}(0,0,-2) =$$

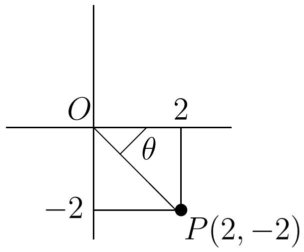
$$= (\frac{7x-7y+7z}{3}, \frac{-2x-y-2z}{3}, \frac{-x+5y-2z}{3}).$$

Se $v = (2,3,1)$, allora $v_B = (3,-1,0)$, quindi $=$

$$L(v)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (6,-3,4).$$

2. Calcolare le radici terze del numero complesso $z = 2 - 2i$.

Nel piano di Gauss, il numero complesso z corrisponde al punto $P(2, -2)$. Pertanto il suo modulo ρ vale $\sqrt{8}$. L'argomento θ è invece l'angolo $-\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$.



Allora $z = \sqrt{8}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$. Se $x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e $x^3 = z$, si deve avere

$$r^3 = \sqrt{8} \Rightarrow r = \sqrt[6]{8}, \quad \varphi = \frac{\frac{7}{3} + 2k\pi}{4}, \; k = 0, 1, 2.$$

....

3. Determinare, se esistono, iperboli equilatere tangenti alla retta r : $2x + y - 2 = 0$ in $R(0, 2)$ ed alla retta $s : 2x - 3 = 0$ nel suo punto improprio.

Si può costruire il fascio di coniche bitangenti alla retta r in R ed alla retta s nel suo punto improprio $Y_\infty(0, 1, 0)$. Le coniche degeneri del fascio sono quindi.
(1) $\mathcal{C}_1 = r \cap s : \; (2x + y - 2)(2x - 3) = 0$
(1) $\mathcal{C}_2 = (retta\ RY_\infty)^2 : \; x^2 = 0.$
Allora l'equazione del fascio è

$$(2X + Y - 2T)(2X - 3T) + kX^2 = 0.$$

Per risolvere il parametro ed ottenere l'iperbole cercata, basta imporre il passaggio del punto $X_\infty(1, 0, 0)$, che indica la direzione ortogonale a quella di Y_∞.