Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 19.01.2016

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$M_C^B(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo

$$B = \{(1,1,1), (2,0,-2), (0,0,1)\}$$

e C la base canonica.
Determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui L è invertibile e nel caso determinarne l'inversa. Negli altri casi determinare $Ker\ L$.

Si ha

$$L(x,y,z) = L(x,y,z)_C = M_C^B(L)(x,y,z)_B =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ x - 2y + z \end{pmatrix} = (kx + (1-2k)y + kz, \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y, x).$$

Dal sistema lineare

$$\begin{cases} kx + (1-2k)y + kz = a \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = b \\ x = c \end{cases},$$

si ottiene che l'applicazione L è invertibile esattamente quando la matrice dei coefficienti ha determinante non nullo, cioè quando $k \neq 2$. La sua inversa è allora

$$L^{-1}(x,y,z) = (\frac{D\begin{pmatrix} x & 1-2k & k \\ y & -\frac{3}{2} & 1 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}}{1-\frac{1}{2}k}, \frac{D\begin{pmatrix} 1 & x & k \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 0 \end{pmatrix}}{1-\frac{1}{2}k}, \frac{D\begin{pmatrix} k & 1-2k & x \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & y \\ 1 & 0 & z \end{pmatrix}}{1-\frac{1}{2}k}).$$

Nel caso $k = 2$ il nucleo di L coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y = 0 \\ x = 0 \end{cases},$$

2. Considerate le rette

$$r : \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2z - 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2k \\ z = k + t \end{cases},$$

determinare i valori del parametro reale k per i quali:
- le due rette sono incidenti,
- le due rette sono sghembe e la loro minima distanza è pari a 5.

Le equazione cartesiane della retta s sono

$$\begin{cases} x - 2z + 2k = 0 \\ y - 2k = 0 \end{cases}.$$

Dalla condizione di complanarità si ricava che le rette sono complanari ed incidenti quando $k = -\frac{1}{2}$. Per ogni altro valore reale di k le rette sono sghembe. Un generico punto di r è $R(1 + a, -1, -1 - a)$, mentre il generico punto di s è $S(2t, 2k, k + t)$. Per risolvere il problema basterà imporre che il vettore $\overline{RS}$ sia ortogonale ad entrambe le rette ed abbia modulo pari a 5.

3. Determinare un'equazione cartesiana dell'iperbole equilatera avente asintoto la retta $r : 2x - y + 5 = 0$, tangente alla retta $s : x + y + 1 = 0$ nel punto $P(-1, 0)$ e passante per l'origine.

L'iperbole cercata contiene il punto improprio $P_\infty(1, 2, 0)$ della retta r ed il punto $Q_\infty(2, -1, 0)$ che ne indica la direzione ortogonale. Si può allora costruire il fascio di iperboli equilatere tangenti alla retta s in P e passanti per i due punti impropri trovati. Una conica degenere del fascio è costituita dalla retta s e dalla retta impropria, mentre l'altra conica degenere è formata dalle rette PP_∞ e PQ_∞. Il passaggio per l'origine risolve il problema.