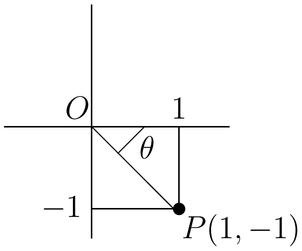
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Primo Test di Geometria del 19.11.2019

1. Calcolare le radici quarte del numero complesso $z = 1 - i$.

Nel piano di Gauss, il numero complesso z corrisponde al punto $P(1, -1)$. Pertanto il suo modulo ρ vale $\sqrt{2}$. L'argomento θ è invece l'angolo $-\frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$.



Allora $z = \sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)$. Se $x = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ e $x^4 = z$, si deve avere

$$r^4 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt[8]{2}, \quad \varphi = \frac{\frac{7}{4} + 2k\pi}{4}, \; k = 0, 1, 2, 3.$$

....

2. Considerata l'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \; L(x, y, z) = (2x - y + z, ky - kz, x - 2kz),$$

determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui essa è invertibile e nel caso determinarne l'inversa. Negli altri casi determinarne nucleo ed immagine.

L'applicazione data è invertibile se e solo se è iniettiva, ovvero il suo nucleo contiene solo il vettore nullo. Affinchè ciò accada la matrice A del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ ky - kz = 0 \\ x - 2kz = 0 \end{cases}$$

deve avere determinante non nullo. Poichè $D(A) = -4k^2$, segue che L è un isomorfismo per tutti i valori di k diversi da 0.
Se $k = 0$ il sistema precedente diviene

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

pertanto si ha $KerL =< (0,1,1) >$, mentre da $L(x,y,z) = (2x - y + z, 0, x)$ si ottiene

$$ImL =< (2,0,1), (-1,0,0), (1,0,0) >=< (2,0,1), (1,0,0) > .$$

Per determinare l'inversa di L nel caso $k \neq 0$ basta risolvere il sistema di Cramer

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ ky - kz = b \\ x - 2kz = c \end{cases}$$

con $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alla fine si ottiene

$$L^{-1}(x,y,z) = (\frac{\begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ y & k & -k \\ z & 0 & -2k \end{vmatrix}}{-4k^2}, \frac{\begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 0 & y & -k \\ 1 & z & -2k \end{vmatrix}}{-4k^2}, \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 0 & k & y \\ 1 & 0 & z \end{vmatrix}}{-4k^2}).$$

3. Determinare la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ da

$$B = \{(1,1,0), (1,0,-1), (3,0,0)\}$$

a

$$B' = \{(1,1,1), (2,-1,0), (0,0,-2)\}.$$

Se $v \in \mathbb{R}^3$ è tale che $v_B = (-1, 4, 2)$, determinare $v_{B'}$.

Si ha:

$$(1,1,0) = 1(1,1,1) + 0(2,-1,0) + \frac{1}{2}(0,0,-2)$$

$$(1,0,-1) = \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(2,-1,0) + \frac{7}{6}(0,0,-2)$$
$$(3,0,0) = 1(1,1,1) + 1(2,-1,0) + \frac{1}{2}(0,0,-2)$$

Quindi

$$A = M_{B'}^{B}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Poi

$$v_{B'} = Av_B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = (\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{31}{6}).$$