FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea Ing. Civile

Test di GEOMETRIA del 20.12.2012

Soluzioni proposte

———————————————————————————

1. Dopo aver verificato che i seguenti insiemi di vettori

$$\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,-2,1),(3,2,0)\}$$

$$\mathcal{B}' = \{(-1,-1,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$$

sono basi per $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Poichè le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante non nullo, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ sono effettivamente basi per $\mathbb{R}^3$. Si ha poi

$$(1,1,1) = 1(-1,-1,1) + 0(0,1,1) + 2(1,1,0)$$

$$(0,2,-1) = -3(-1,-1,1) + 2(0,1,1) - 3(1,1,0)$$

$$(3,2,0) = 1(-1,-1,1) - 1(0,1,1) + 4(1,1,0)$$

pertanto

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare la retta a parallela alla retta

$$r : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

ed incidente le rette

$$s : \begin{cases} x = -2z + 1 \\ y = 3z + 1 \end{cases}, \qquad t : \begin{cases} x = 2z - 3 \\ y = -z + 2 \end{cases},$$

Deteminare poi il versore di a quando questa è orientata in modo da formare un angolo ottuso con l'asse z.

La retta a ha gli stessi parametri direttori di r, allora

$$a : \begin{cases} x = z + p \\ y = 2z + q \end{cases}.$$

Le condizioni di complanarità di a con s e t sono, rispettivamente :

$$D \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -p \\ 0 & 1 & -2 & -q \end{pmatrix} = 0, \qquad D \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -p \\ 0 & 1 & -2 & -q \end{pmatrix} = 0,$$

e da esse si ricava $p = 25/8$, $q = -19/8$.
Poichè il vettore di componenti $(1, 2, 1)$ è parallelo alla retta a ed essa è orientata nen verso delle z deccrescenti, il versore cercato è quello di componenti $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$.

3. Verificare che la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 - 2y^2 + xy - x + 4y - 2 = 0$$

è degenere e determinarne le componenti.

La conica è degenere, infatti la sua matrice ha determinante nullo :

$$D \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -2 & 2 \\ -1/2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 0$$

Si ha

$$x^2 - 2y^2 + xy = (x - y)(x + 2y).$$

Allora la conica data ha equazione della forma

$$(x - y + h)(x + 2y + k) = 0$$

ovvero

$$x^2 - 2y^2 + xy + (h + k)x + (2h - k)y + hk = 0.$$

Da

$$\begin{cases} h + k = -1 \\ 2h - k = 4 \\ hk = -2 \end{cases}$$

segue $h = 1$ e $k = -2$.

4. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2k \\ x + 4y = k - 2 \\ 3x - y = 3k + 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k

(Si tratta di un sistema lineare di 3 equazioni in 2 incognite) La matrice dei coefficienti ha evidentemente rango 2, mentre la matrice completa ha rango 3, indipendentemente dal parametro k. Allora il sistema non ammette soluzioni, qualunque sia k.