Geo1.aux Geo1.aux Geo1.aux

FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea Ing. Civile

Seconda Prova scritta di GEOMETRIA del 21.12.2016

———————————————————————————

1. Sia $R(O, x, y)$ un riferimento cartesiano ortogonale nel piano. Sia $R'(O', x', y')$ il riferimento contraverso con R, essendo x' è la retta di equazione $x+y-1=0$, orientata nel verso delle ordinate crescenti, e $O'(1, -1)$. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento da R ad R' e viceversa.

– –

2. Dopo aver verificato che le rette

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{ed} \quad s: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

sono sghembe, determinare la loro minima distanza e la retta ortogonale ed incidente ad entrambe.

– –

Le equazioni cartersiane di r e quelle parametriche di s sono rispettivamente

$$r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 1 \end{cases}, \qquad s: \begin{cases} x = -2u \\ y = -u \\ z = u \end{cases}.$$

Le due rette sono sghembe poichè

$$D\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

Posto $R(t, t-1, 1) \in r$ e $S(-2u, -u, u) \in s$, si ha $\overline{SR} = (t+2u, t+u-1, u-1)$. Le condizioni di ortogonalità di tale vettore con le due rette conducono al sistema

$$\begin{cases} 3t + 3u = 1 \\ 3t + 6u = 2 \end{cases}$$

con soluzione $(t, u) = (0, \frac{1}{3})$. Allora $\overline{SR} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ e la minima distanza tra le rette date è pari a

$$||\overline{SR}|| = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

La retta cercata è quella per R ed S.

3. Considerata la curva algebrica di equazione cartesiana

$$x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 2y = 0,$$

studiarla nell'origine e nei suoi punti impropri.

– –

L'equazione complessiva delle rette per l'origine e per i punti impropri della conica è $x^2 - xy + 2y^2 = 0$. Le rette in questione sono immaginarie e coniugate con equazioni

$$y = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{4}x.$$

Allora la conica è un'ellisse con punti impropri

$$P_\infty(1, \frac{1+i\sqrt{7}}{4}, 0) \quad ed \quad \overline{P}_\infty(1, \frac{1-i\sqrt{7}}{4}, 0).$$

Entrambi i punti sono sempici, come si verifica con il metodo delle derivate parziali, e le tangenti sono pure semplici da calcolare.

4. Determinare e classificare la conica tangente alla retta $r : x-y+2=0$ nel punto $P(0,2)$, alla retta $s : 2x-y+5=0$ nel suo punto improprio e passante per l'origine.

— —

Basta considerare il fascio di coniche bitangenti alla retta r in P ed alla retta s in $S_\infty(1,2,0)$, poi tra queste, determinare quella per l'origine.

3'. Determinare l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la cui matrice rispetto alle basi $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,0,-1),(0,0,3)\}$, $\mathcal{B}' = \{(1,1),(1,0)\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Determinare inoltre il nucleo di L.

— —

Si ha:
$L(1,1,1) = 0(1,1) + 0(1,0) = (0,0)$,
$L(1,0,-1) = 3(1,1) + 0(1,0) = (3,3)$,
$L(0,0,3) = 0(1,1) + 2(1,0) = (2,0)$.
Poichè

$$(x,y,z) = y(1,1,1) + (x-y)(1,0,-1) + \frac{x-2y+z}{3}(0,0,3),$$

segue

$$L(x,y,z) = y(0,0) + (x-y)(3,3) + \frac{x-2y+z}{3}(2,0) = ...$$

4'. Discutere ed eventualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ 2x + ky + z = -k \\ 2x - y - kz = 0 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

– –

La matrice dei coefficienti del sistema ha rango 3 per tutti i valori reali di k, $k \neq -1$ e rango 2 per $k = -1$. La matrice completa, nel caso $k = -1$, ha rango 3. Allora ...