DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE-AMBIENTALE
CORSO DI LAUREA ING. CIVILE
SECONDO TEST (B E U) DI GEOMETRIA DEL 22.12.2017
A.A. 2017/18 -

(1U) Determinare la matrice del cambiamento di base in $\mathbb{R}^3$ dalla base $B = \{(0,0,1),(0,1,-1),(2,1,0)\}$ alla base $B' = \{(-1,-1,1),(2,0,-1),(1,0,1)\}$,

---

La matrice da determinare è $M^B_{B'}(id)$ ove $id : \mathbb{R}^3_B \to \mathbb{R}^3_{B'}$. Si ha:

$$(0,0,1) = 0(-1,-1,1) - \frac{1}{3}(2,0,-1) + \frac{2}{3}(1,0,1),$$

$$(0,1,-1) = -1(-1,-1,1) - \frac{1}{3}(2,0,-1) - \frac{1}{3}(1,0,1),$$

$$(2,1,0) = -1(-1,-1,1) + \frac{1}{3}(2,0,-1) + \frac{4}{3}(1,0,1).$$

Pertanto la matrice richiesta è

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

(2U) Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$L(e_1) = 2e_1 - e_3,\ L(e_2) = 2e_1 - e_2 + e_3,\ L(e_3) = 2e_2 - 2e_3,$$

essendo $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica. Provare che L è invertibile e determinarne l'inversa.

Si ha:

$$L(e_1) = (2,0,-1), \quad L(e_2) = (2,-1,1), \quad L(e_3) = (0,2,-2).$$

Allora:

$$L(x, y, z) = xL(e_1) + yL(e_2) + z(e_3) = (2x + 2y, -y + 2z, -x + y - 2z).$$

si verifica facilmente che tale applicazione è invertibile, ad es. trovando che il nucleo contiene solo il vettore nullo. L'applicazione inversa si ottiene risolvendo il sistema di Cramer

$$\begin{cases} 2x + 2y = a \\ -y + 2z = b \\ -x + y - 2z = c \end{cases}$$

(1B) Determinare la retta per il punto $P(1, 0, -1)$ parallela al piano $\pi : 2x - 3y - z + 7 = 0$ e incidente la retta

$$s : \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - 3z = 1 \end{cases}$$

La retta richiesta si può ottenere intersecando il piano per P parallelo a π con il piano del fascio di asse s per P.

(2B) Determinare la minima distanza tra le rette.

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} , \quad s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 1 \\ z = -t \end{cases}$$

Equazioni parametriche per r sono, ad es.,

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = u + 1 \\ z = u \end{cases}$$

Il metodo più semplice per risolvere il problema è quello di considerare generici punti

$$R(1, u+1, u) \in r, \qquad S(t+1, t-1, -t) \in s.$$

Si impone poi che il vettore $\overline{RS}$ sia ortogonale ad entrambe le rette e si ricavano valori per i parametri. La minima distanza tra le due rette coincide con il modulo di $\overline{RS}$.

(3UB) Studiare la curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione

$$xy^2 - x^2y + 2xy - x - y = 0$$

nei suoi i punti impropri e nell'origine.

I punti impropri della curva sono quelli delle rette per l'origine di equazione complessiva $xy^2 - x^2y = 0$. Cioè

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = x.$$

Quindi: $Y_\infty(0,1,0)$, $X_\infty(1,0,0)$, $P_\infty(1,1,0)$.
Le derivate parziali prime F_X, F_Y, F_T calcolate nei punti, mostrano che essi sono tutti semplici, mentre le relative tangenti si determinano con la formula $F_X(P)X + F_Y(P)Y + F_T(P)T = 0$. Lo stesso vale per il punto origine $O(0,0,1)$.

4. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento cartesiano da $R(O,x,y)$ a $R'(O',x',y')$, e viceversa, essendo gli assi x', y' le rette di equazione:

$$x' : 2x - y + 2 = 0, \quad y' : x + 2y + 1 = 0,$$

la prima orientata nel verso delle ordinate decrescenti e la seconda nel verso delle ascisse crescenti. Dire se i due sistemi sono equiversi oppure contraversi.

---

x' ha parametri direttori $(1,2)$. y' ha parametri direttori $(2,-1)$. Allora i possibili versori sono

$$i'\left(\frac{1}{\pm\sqrt{5}}, \frac{2}{\pm\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad j'\left(\frac{2}{\pm\sqrt{5}}, \frac{-1}{\pm\sqrt{5}}\right).$$

Le richieste di orientamento forniscono

$$i'(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}) \quad \text{e} \quad j'(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}).$$

Allora la matrice del cambiamento di base da I' ad I è

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad .$$

Si vede subito che i due sistemi sono equiversi poichè $det(A) = 1$.
Le equazioni del cambiamento di riferimento da R' a R sono allora

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

ove $O'(-1, 0) = x' \cap y'$.
...