FACOLTÀ di INGEGNERIA

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del 23.01.2013

——————————————————————————

1. Considerata l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

- $L(0,1,0) = (1,2,0)$,
- $L(4,-2,0) = (2,0,4)$,
- $L(0,0,3) = (1,0,-1)$,

si scriva la sua matrice rispetto alle basi canoniche dei due spazi. Determinarne poi nucleo ed immagine.

I vettori $(0,1,0),(4,-2,0),(0,0,3)$ sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Allora l'applicazione L è univocamente determinata.
Per $(x,y,z) \in R^3$ si ha

$$(x,y,z) = (\frac{1}{2}x + y)(0,1,0) + \frac{1}{4}x(4,-2,0) + (x - \frac{1}{3}z)(0,0,3).$$

Allora

$$L(x,y,z) = (\frac{1}{2}x+y)(1,2,0)+\frac{1}{4}x(2,0,4)+(x-\frac{1}{3}z)(1,0,-1)) = (x+y+\frac{1}{3}z, x+2y, x-\frac{1}{3}z).$$

Si ottiene

$$L(1,0,0) = (1,1,1), \quad L(0,1,0) = (1,2,0), \quad L(0,0,1) = (\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}),$$

da cui

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Poichè tale matrice ha determinante non nullo, l'applicazione L è invertibile, quindi

$$Ker\ L = \{\overline{0}\}, \quad Im\ L = \mathbb{R}^3$$

2. Determinare equazioni parametriche della retta r per il punto $P(-1,1,0)$, parallela al piano $\pi : 2x+3y-5z+19=0$ ed incidente la retta

$$s : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1+4t \\ z = 1-2t \end{cases} .$$

Determinare poi il versore di r orientato in modo da formare un angolo acuto con l'asse y.

Le equazioni cartesiane di s sono, ad es.,

$$s : \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} .$$

La retta r si ottiene come intersezione del piano σ per s e per P con il piano π' parallelo a π passante per P.
Sia ha quindi

$$r : \begin{cases} y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 3y - 5z - 1 = 0 \end{cases} ,$$

che per $t = z$ ammette equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = -1 + \frac{11}{2}t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

con parametri direttori $(11, -4, 2)$. Il vettore con tali coordinate è parallelo alla retta r, pertanto il versore cercato è il vettore di coordinate $(-\frac{11}{\sqrt{141}}, \frac{4}{\sqrt{141}}, -\frac{2}{\sqrt{141}})$.

3. Determinare le coniche passanti per i punti $A(1,1)$, $B(-3,1)$ e tangenti all'asse y nel punto $C(0,2)$. Determinare tra di esse eventuali parabole.

Costruiamo il fascio di coniche tangenti all'asse y in C e passanti per A e B. Le coniche degeneri sono

- quella spezzata nell'asse y e nella retta per A e B, che ha equazione

$$x(y-1)=0$$

- quella spezzata nelle rette per C e A e per C e B, che ha equazione

$$(x+y-2)(x-3y+6)=0.$$

Allora l'equazione del fascio è

$$x^2-3y^2+(k-2)xy+4x+12y-12-k=0.$$

La condizione per avere parabole è

$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$$

cioè

$$\frac{(k-2)^2}{4}+3=0 \Rightarrow k^2-4k+16=0.$$

Piochè l'equazione non ammette radici reali, non esistono parabole (reali) nel fascio.