Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 23..01.2015

---

1. Siano $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

e $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione definita da

$$L(M) = AM + MB,$$

per ogni $M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Verificare che L è lineare e determinarne nucleo ed immagine.

Posto

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

si ha

$$L(M) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+2z & y+2t \\ -z & -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -x+3y \\ t & -z+3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z & -x+4y+2t \\ -z+t & -z+2t \end{pmatrix}.$$

Se

$$M' = \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix},$$

si ha, per le proprietà del prodotto righe$\times$colonne,

$$L(M+M') = A(M+M') + B(M+M') = (AM+MB) + (AM'+M'B) =$$

$$= L(M) + L(M').$$

La seconda proprietà di linearità per L si verifica immediatamente in modo analogo.
Per determinare il nucleo di L basta porre

$$L(M) = \begin{pmatrix} x+y+2z & -x+4y+2t \\ -z+t & -z+2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -x+4y+2t=0 \\ -z+t \\ -z+2t=0 \end{cases} .$$

Poichè la matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo segue che l'applicazione lineare L è un isomorfismo...

2. Determinare, se esiste, una retta r contenente il punto $P(0,1,0)$, parallela al piano $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$ e ortogonale alla retta

$$s : \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+z=1 \end{cases} .$$

Esiste un'unica retta r come richiesto, che si ottiene, ad es., come intersezione del piano σ parallelo a π e passante per P, e del piano γ ortogonale a s e passante per P. Si ha

$$\sigma : 2x - y + z + 1 = 0,$$

$$\gamma : x + y - 2z - 1 = 0.$$

3. Determinare un'equazione cartesiana della parabola contenente il punto improprio della retta $r : x - 3y + 5 = 0$, tangente alla retta $s : 2x - y + 3 = 0$ nel punto $P(-1,1)$ e passante per l'origine.

La parabola cercata è tangente alla retta impropria nel punto $R_\infty(3,1,0) \in r$. Allora si può considerare il fascio di parabole bitangenti a $T=0$ in R_∞ ed alla retta s in P. Le coniche degeneri sono:

- quella spezzata nella retta impropria e nella retta s, di equazione (2X-Y+3)T=0,

- quella spezzata nella retta per P e per R_∞, contata due volte, di equazione $(X-3Y-2T)^2=0$.

L'equazione del fascio è allora

$$(2X-Y+3)T + k(X-3Y-2T)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per l'origine $O(0.0,1)$ si ricava il valore del parametro ...