Dipartimento di Ingegneria Civile-Ambientale
Corso di Laurea Ing.Civile
Secondo test di GEOMETRIA del 23.12.2019

A e B

---

1. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento (cartesiano ortogonale) da $R(O, x, y, z)$ a $R'(O', x', y', z')$ sapendo che :

- l'asse x' è la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = -z + 1 \end{cases}$$

orientata nel verso delle x crescenti,

- l'asse y' è la retta di equazioni

$$r : \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

orientata nel verso delle z decrescenti,

- i due sistemi sono contraversi.

La retta x' ha parametri direttori $(2, -1, 1)$ e la retta y' ha parametri direttori $(-1, -1, 1)$. Allora

$$i'(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), \quad j'(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}).$$

Si ha poi $x' \cap y' = O'(2, 0, 1)$, quindi l'asse z' è la retta per O' ortogonale a x' e y':

$$\frac{x-2}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z-1}{n}$$

con

$$\begin{cases} 2l - m + n = 0 \\ l + m - n = 0 \end{cases}$$

da cui $z'(0,1,1)$ e $k'(0, \frac{1}{\pm\sqrt{2}}, \frac{1}{\pm\sqrt{2}})$. Poichè i sistemi sono contraversi, risulta $k'(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ e pertanto

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Riusolvendo il sistema sopra nelle incognite x', y', z', si ottengono le equazioni del cambiamento di riferimento da R ad R'.

2. Determinare se esistono coniche bitangenti alla circonferenza

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 - x + 3y + 1 = 0$$

nei suoi punti di intersezione con la retta $r : y = -x$ e passanti per il punto $P(2,0,0)$.

La retta r interseca la circonferenza nei punti P_1 e P_2. In tali punti le tangenti alla circonferenza sono, rispettivamente, le rette t_1 e t_2. Si può allora costruire il fascio di coniche bitangenti a t_1 in P_1 e a t_2 in P_2. Le coniche degeneri del fascio sono allora:

- $\mathcal{C}_1 = t_1 \cup t_2$,
- $\mathcal{C}_2 =$ la retta per P_1 e P_2, ovvero la retta r, contata due volte.

...

3. Dopo aver trovato la proiezione ortogonale della retta

$$r : \begin{cases} x = 2z + 1 \\ y = -z \end{cases}$$

sul piano $\pi : x - y + 3 = 0$, se ne determini il versore orientato nel verso delle y decrescenti.

La retta cercata si ottiene intersecando π con il piano per r ortogonale a π:

- piano generico per r: $x-2z-1+k(y+z)=0$, cioè $x+ky+(k-2)z-1=0$,
- la condizione di ortogonalità con π fornisce $k=1$,

ha quindi equazioni

$$\begin{cases} x-y+3=0 \\ x+y-z-1=0 \end{cases}.$$

Poichè i suoi parametri direttori sono $(1,1,2)$, il versore cercato è $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$.

4. Sia $L:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

essendo le basi $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,0,-2),(1,1,1)\}$ e $\mathcal{C}$ quella canonica. Sia poi $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x,y,z) = (x-y, x-z, y-z, x)$. Determinare nucleo ed immagine di $T \circ L$.

Da $(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,0,-2) + c(1,1,1)$ si ricava che

$$(x,y,z)_{\mathcal{B}} = (x-y, \frac{-x+y-z}{2}, y).$$

Si ha:

$$L(x,y,z) = L(x,y,z)_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(L)(x,y,z)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-y \\ \frac{-x+y-z}{2} \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= (x-y, \frac{x-y+z}{2}, \frac{-x+y-z}{2}).$$

Allora

$$T \circ L(x,y,z) = T(x-y, \frac{x-y+z}{2}, \frac{-x+y-z}{2}) =$$
$$= (\frac{x-y-z}{2}, \frac{3x-3y+z}{2}, x-y+z, x-y).$$

Segue:

$$Im(T \circ L) =< (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 1), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0) > .$$

...

5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sia V il sottospazio generato dai vettori $(1, 0, 1), (-2, 0, 1)$ e sia

$$W = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di $V \cap W$.

Un vettore di V è della forma $v = (a - 2b, 0, a + b)$. v appartiene anche a W se $a - 2b = 0$, cioè $a = 2b$. Allora nell'intersezione $V \cap W$ ci sono i vettori del tipo $v = (0, 0, 3b)$, per $b \in \mathbb{R}$. Segue $V \cap W =< (0, 0, 3) >$.