Prova Scritta di GEOMETRIA del 24 Giugno 2005
Soluzioni Proposte

1. Si considerino le applicazioni lineari $f : R^2 \to R^3$ definita da $f(x, y) = (x, 2y, x + y)$ e $g : R^3 \to R^3$ rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Determinare una base di $Im(g \circ f)$.

L'applicazione lineare g si ottiene come segue :

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + z, 2x + y + 4z, 3x + y + 5z).$$

Allora

$$g \circ f(x, y) = g(x, 2y, x + y) = (2x + y, 6x + 6y, 8x + 7y)$$

Si ha

$$Im(g \circ f) = \{(2x + y, 6x + 6y, 8x + 7y) \quad | \quad x, y \in R\} = \ldots$$

$$\ldots =< (2, 6, 8), (1, 6, 7) > .$$

Si vede facilmente che $Im(g \circ f)$ ha dimensione 2 ed una sua base e' quella indicata.

2. Stabilire per quali valori reali di k il seguente sistema lineare ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ hx - y + (3 + h)z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

ed eventualmente determinarle.

La matrice dei coefficienti del sistema :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ h & -1 & 3+h \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo indipendentemente da h ed ha rango 2. La matrice completa ha rango 3 per $h \neq 1$(considera le prime due colonne piu' quella dei termini noti). Allora, per $h \neq 1$ il sistema non e' risolubile. Nel caso $h = 1$ il sistema diviene

$$\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

il quale ha un insieme di soluzioni di dimensione 1, che si calcolano nel modo solito.

3. Determinare equazioni cartesiane delle parabole tangenti in $P(2,1)$ alla retta $r : x + 2y - 4 = 0$ e passanti per i punti $Q(1,0)$ e $R(2,3)$.

Si puo' costruire il fascio di coniche bitangenti alla retta data nel punto P ed alla retta impropria nel punto $A_\infty = (b, -a, 0)$. Le coniche degeneri del fascio sono allora quella costituita dalla retta data e dalla retta impropria e quella costituita dalla retta per P e A_∞ contata due volte. L'equazione del fascio in coordinate omogenee e'

$$(X + 2Y - 4T)T + k(aX + bY - (2a + b)T)^2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per i punti Q ed R si ricava il valore di k.

4. Determinare equazioni parametriche della retta passante per il punto $A(1,0,3)$, incidente la retta impropria del piano xy e la retta di equazioni

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

-

La retta cercata appartiene al piano per A del fascio di asse la retta

$$\begin{cases} Z = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

ed al piano per A del fascio di asse la retta

$$\begin{cases} X + 2Y - 3Z = 0 \\ X + 2Z = 0 \end{cases}$$

La retta cercata si potra' ottenere come intersezione dei due piani trovati.

L.S.