Prova Scritta di GEOMETRIA del 24 Settembre 2004
Soluzioni Proposte

1. L'applicazione L e' definita come segue

$$L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= (3x+2z, 2x+y+3z, 4x+5y+8z, 2x+4y+5z).$$

Il suo nucleo coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 3y+2z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ 4x+5y+8z=0 \\ 2x+4y+5z=0 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti e' esattamente $M_C^C(L)$ ed ha rango 2. Segue che lo spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione 1, cosicche' L non e' iniettiva.

2. La matrice completa del sistema ha evidentemente rango 2, qualunque sia il valore di k. Anche la matrice dei coefficienti ha sempre rango 2. Quindi il sistema e' sempre risolubile, con insieme di soluzioni di "dimensione" 2. Si risolve il sistema di Cramer

$$\begin{cases} x-y = 1-2z-4t \\ kx-2y = 3-(k+2)z-(k+4)t \end{cases}$$

ove z e t si intendono trattati come parametri reali. Allora le soluzioni del sistema di partenza sono tutte le quaterne

$$\left(\frac{\begin{vmatrix} 1-2z+4t & -1 \\ 3-(k+2)z-(k+4)t & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & -2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z+4t \\ k & 3-(k+2)z-(k+4)t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & -2 \end{vmatrix}}, z, t \right)$$

per ogni $z,t \in R$.
Si noti che le soluzioni trovate sono tali per tutti i sistemi con $k \neq 2$. Nel caso $k=2$ e' necessario scegliere un diverso minore della matrice dei coefficienti, ad esempio quello costituito dalla terza e quarta colonna e risolvere il corrispondente sistema di Cramer.

3. L'asse y ha parametri direttori $(0,1,0)$, pertanto un vettore ad esso parallelo e' del tipo $u = (0,t,0)$. Un vettore $v = (\alpha,\beta,\gamma)$ parallelo al piano dato, che ha parametri di giacitura $(1,2-1)$, e' tale che

$$\alpha + 2\beta - \gamma = 0.$$

Percio' $\gamma = \alpha + 2\beta$ e quindi $v = (\alpha,\beta,\alpha+2\beta)$. Si deve avere

$$u + v = (\alpha, \beta + t, \alpha + 2\beta) = (2,1,2),$$

quindi si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta + t = 1 \\ \alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$$

da cui si ricava $\alpha = 2, \quad \beta = 0, \quad t = 1$, cioe' $u = (0,1,0)$ e $v = (2,0,2)$.

4. Le circonferenze cercate determinano il fascio di coniche tangenti alla retta $x-4y+2 = 0$ in $P(2,1)$ e passanti per i punti ciclici del piano $C_1(1,i,0)$ e $C_2(1,-i,0)$. Le coniche degeneri del fascio sono, una $\mathcal{G}_1$ costituita dalla retta impropria e dalla retta data, e l'altra $\mathcal{G}_2$ dalle rette per P e C_1 e per P e C_2.
Si ha :
$\mathcal{G}_1 : (X - 4Y + 2T)T = 0,$
$\mathcal{G}_2 : [(Y-T)+i(X-2T)][(Y-T)-i(X-2T)] = (Y-T)^2+(X-2T)^2 = 0.$
Allora l'equazione del fascio e'

$$(Y-T)^2 + (X-2T)^2 + k(X-4Y+2T)T = 0.$$

Il passaggio per il punto $Q(3,1,1)$ fornisce $k = -1$.