Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 27.04.2015
Soluzioni Proposte

---

1. Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$L(x, y, z) = (x + y + 3z, x + 2y + 5z, -x - 3y - 7z).$$

Determinare $L^2 = L \circ L$ e determinarne il nucleo e l'immagine. Determinare inoltre $M_B^C(L^2)$, essendo C la base canonica e $B = \{(1, 0, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$.

Si ha

$$L^2(x, y, z) = (-x - 6y - 13z, -2x - 10y - 22z, 3x + 14y + 31z).$$

Allora il nucleo di L^2 coincide con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} -x - 6y - 13z = 0 \\ -2x - 10y - 22z = 0 \\ 3x + 14y + 31z = 0 \end{cases},$$

quindi $Ker\ L^2 =< (-1, -2, 1) >$.

$Im\ L^2 = \{(-x - 6y - 13z, -2x - 10y - 22z, 3x + 14y + 31z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} =$

$$=< (-1, -2, 3), (-6, -10, 14), (-13, -22, 31) >=$$
$$=< (-1, -2, 3), (-6, -10, 14) > .$$

Per la seconda parte:

- $L^2(1, 0, 0) = (-1, -2, 3) = 4(1, 0, 0) - 5(1, 0, -1) - 2(0, 1, 1)$,
- $L^2(0, 1, 0) = (-6, -10, 14) = 18(1, 0, 0) - 24(1, 0, -1) - 10(0, 1, 1)$,

- $L^2(0,0,1) = (-13,-22,31) = 40(1,0,0) - 53(1,0,-1) - 22(0,1,1)$,

allora

$$M_B^C(L^2) = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 40 \\ -5 & -24 & -53 \\ -2 & -10 & -22 \end{pmatrix}.$$

2. Determinare il piano π per l'origine, parallelo alla retta

$$r : \begin{cases} x - 3z + 1 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano $\sigma : 3x - 2y + z - 1 = 0$. Determinare inoltre il versore della normale a π, orientata nel verso delle z decrescenti.

Si può costruire il piano π come il piano per tre punti: l'origine, il punto improprio della retta r, cioè $P_\infty(3,2,1,0)$, il punto improprio della normale a σ, cioè $Q_\infty(3,-2,1,0)$, allora

$$\pi : det \begin{pmatrix} X & Y & Z & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4X - 12Z = 0.$$

La normale a π ha la direzione del vettore $(3,-2,1)$, il quale ha modulo

$$||v|| = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}.$$

Segue che il versore della normale a π è il vettore di coordinate

$$(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}).$$

3. Determinare e classificare la conica non degenere tangente alla retta $r : x = 0$ nel punto $P(0,1)$, tangente alla retta $s : x - 2y = 0$ in $Q(2,1)$ ed inoltre tangente alla retta $t : 3x - y - 1 = 0$.

Costruiamo il fascio di coniche bitangenti a r in P ed a s in Q:

$$\mathfrak{F} : (y-1)^2 + kx(x-2y) = 0.$$

Intersecando la generica conica del fascio con la retta t si ottiene l'equazione

$$(9-5k)x^2 + 2(k-6)x + 4 = 0,$$

il cui discriminante

$$\Delta = (k-6)^2 - 4(9-5k)$$

si annulla per $k = 0$ e $k = -8$.
Per $k = 0$ otteniamo la conica degenere $(y-1)^2 = 0$ che è da scartare. Per $k = -8$ otteniamo la conica cercata di equazione $8x^2 - y^2 - 16xy + 2y - 1$, che è una iperbole.