Soluzioni Proposte della Prova Scritta di

GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE) dell 25.09.2008

1. Determinare se esiste un'applicazione lineare

$$L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3,$$

tale che
$L(1,1,1) = (-1,2,0)$,
$L(0,-1,-1) = (3,0,1)$,
$L(1,0,3) = (-1,2,0)$,
$L(1,0,1) = (1,0,3)$,

I vettori $(1,1,1),(0,-1,-1),(1,0,3)$ costituiscono una base per $\mathtt{R}^3$, essendo linearmente indipendenti. Allora esiste un'unica applicazione lineare $L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$, che li trasporta, ordinatamente nei vettori $(-1,2,0),(3,0,1),(-1,2,0)$, Per un generico vettore $(x,y,z) \in \mathtt{R}^3$ si ha

$$(x,y,z) = a(1,1,1) + b(0,-1,-1) + c(1,0,3) = (a+c, a-b, a-b+3c)$$

quindi il sistema lineare (di Cramer)

$$\begin{cases} a+c = x \\ a-b = y \\ a-b+3c = z \end{cases}$$

la cui unica soluzione é

$$(\frac{3x+y-z}{3}, \frac{3x-2y-z}{3}, \frac{y-z}{3}).$$

Si ottiene allora

$$L(x,y,z) = \frac{3x+y-z}{3}(1,1,1) + \frac{3x-2y-z}{3}(0,-1,-1) + \frac{y-z}{-3}(1,0,3) =$$

$$= (\frac{6x-8y-z}{3}, \frac{6x+4y-4z}{3}, \frac{3x-2y-z}{3}).$$

Si ha $L(1,0,1) \neq (1,0,3)$, pertanto l'applicazione cercata non esiste.