FACOLTÀ DI INGEGNERIA

CORSO DI LAUREA ING. CIVILE

APPELLO DI GEOMETRIA DEL 28.04.2014

---

1. Determinare, se esiste, un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L(1,0,-1) = (1,2), \quad L(2,2,1) = (-1,-1),$$

$$L(0,2,0) = (0,5), \quad L(1,-2,5) = (-5,-23).$$

Determinarne eventualmente il nucleo e la matrice rispetto alle basi canoniche.

I vettori $(1,0,-1)$, $(2,2,1)$, $(0,2,0)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto esiste un'unica applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$L(1,0,-1) = (1,2), \quad L(2,2,1) = (-1,-1), \quad L(0,2,0) = (0,5).$$

Per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha :

$$(x,y,z) = \frac{x-2z}{3}(1,0,-1) + \frac{x+z}{3}(2,2,1) + \frac{-2x+3y-2z}{6}(0,2,0).$$

Allora

$$L(x,y,z) = \frac{x-2z}{3}(1,2) + \frac{x+z}{3}(-1,-1) + \frac{-2x+3y-2z}{6}(0,5) =$$

$$= (-z, \frac{-8x+15y-20z}{6})$$

e vale effettivamente $L(1,-2,5) = (-5,-23)$.
Si ha subito $Ker\, L =< (15,8,0) >$.
Poichè, infine

$$L(1,0,0) = (0, -\frac{4}{3}), \quad L(0,1,0) = (0, \frac{5}{2}), \quad L(0,0,1) = (-1, -\frac{10}{3}),$$

si ottiene

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(L) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{2} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

2. Determinare le equazioni cartesiane della retta per $P(1,-1,2)$, incidente l'asse z e ortogonale ai piani $\pi : 2x+y+1=0$ e $\sigma : x-2z+3=0$.

---

3. Determinare l'equazione omogenea della parabola che contiene il punto improprio dell'asse y, è tangente alla curva $\mathcal{C} : x^3-2x^2y+3x-y+1=0$ in $P(0,1)$ e contiene inoltre il punto $Q(3,-3)$.

La tangente t alla curva $\mathcal{C}$ nel punto P:

$$f_x(x,y) = 3x^2-4xy+3, \quad f_y(x,y) = -2x^2-1,$$

$$f_x(0,1) = 3, \quad f_y(0,1) = -1.$$

Allora $t : 3x-y+1=0$.
Si costruisce poi il fascio di coniche bitangenti a t in P ed alla retta impropria nel punto $Y_\infty(0,1,0)$, si ottiene il fascio di parabole di equazione:

$$(3X-Y+T)T+kX^2=0.$$

Il passaggio per il punto $Q(3,-3,1)$ risolve il parametro k.