Prova Scritta di GEOMETRIA del 28 Giugno 2004 – Soluzioni Proposte

1. Nello spazio vettoriale R^4 siano V il sottospazio generato dai vettori $(1,0,2,0)$ e $(0,1,0,1)$ e

$$W = \{(x,y,z,t) : x+y=0\}.$$

Determinare la dimensione ed una base di $V \cap W$.

Si ha

$$W = \{(x,-x,z,t)|x,z,t \in R\} = \ldots =< (1,-1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) >$$

Un vettore $v \in V \bigcap W$ deve potersi scrivere contemporaneamente come

$$v = a(1,0,2,0) + b(0,10,1) \quad e \quad v = c(1,-1,0,0) + d(0,0,1,0) + e(0,0,0,1)$$

per opportuni $a,b,c,d,e \in R$. Allora

$$v = (a,b,2a,b) \quad e \quad v = (c,-c,d.e).$$

Si ottiene $a = c, b = e = -a, d = 2a$, quindi l'intersezione non e' ridotta al solo vettore nullo e si puo' scrivere

$$V \bigcap W = \{a(1,0,2,0) - a(0,10,1))|a \in R\} =$$

$$= \{(a,-a,2a,a)|a \in R\} =< (1,-1,2,1) > .$$

Quindi la dimensione di $V \bigcap W$ e' 1.

2. Sia $L : R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$M_B^C(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ove $B = \{(0,3,0),(1,0,2),(0,0,2)\}$ e C éla base canonica di R^4: Si determini la dimensione ed una base di ImL.
