SOLUZIONI
della Prova Scritta di
GEOMETRIA (C.d.L. Ing. CIVILE)

del 29.09.2009

1. Determinare la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$ dell'applicazione lineare $L : \mathtt{R}^3 \to \mathtt{R}^3$ definita da

$$L(x, y, z,) = (2x - y - z, x - y + z, x - z),$$

essendo $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, -2, 0)\}$ e dedurne che l'applicazione è invertibile.

Si ha

1. $L(1, -1, 0) = (3, 2, 1) = 3(1, 0, 0) + 1(1, 0, 1) - 1(1, -2, 0)$
2. $L(1, 0, -1) = (3, 0, 2) = 1(1, 0, 0) + 2(1, 0, 1) + 0(1, -2, 0)$
3. $L(0, 1, 0) = (-1, -1, 0) = -\frac{3}{2}(1, 0, 0) + 0(1, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, -2, 0)$

segue quindi

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Poichè il determinante di tale matrice è non nullo, si puó concludere che l'applicazione L é invertibile.

2. Studiare i punti impropri della curva algebrica $\mathcal{C}$ di equazione

$$2x^3 - x^2y - xy^2 + 6x^2 - 3y^2 - 3xy + 2 = 0$$

Si ha

$$2x^3 - x^2y - xy^2 = x(2x^2 - xy - y^2) = x(x - y)(2x + y)$$

allora i punti impropri della curva sono $Y_\infty(0,1,0)$, $\mathrm{P}_\infty(1,1,0)$ e $Q_\infty(1,-2,0)$
La retta generica per Y_∞ ha equazione $x = k$. Intersecandola con la curva si ottiene

$$(k+3)y^2 + (k^2+3k)y + 2k^3 + 6k^2 + 2 = 0,$$

quindi ci sono sempre due intersezioni proprie ed una sola in Y_∞, il quale risulta pertanto un punto semplice. La tangente alla curva in Y_∞ é la retta di equazione $x = -3$, infatti per $k = -3$ l'equazione precedente si abbassa di grado.
La retta generica per P_∞ ha equazione $y = x + k$. Intersecandola con la curva si ottiene

$$3kx^2 + (k^2 - 9k)x + 3k^2 - 2 = 0.$$

Anche in questo caso ci sono sempre due intersezioni proprie ed una sola in P_∞, qualunque sia il valore di k. Segue che P_∞ é un punto semplice e che la retta tangente in tale punto ha equazione che si ottiene per il valore $k = 0$, cioè $y = x$.
La retta generica per Q_∞ ha equazione $y = -2x + k$. Intersecandola con la curva si ottiene

$$-kx^2 - 15kx - 3k^2 + 2 = 0.$$

Si hanno sempre due intersezioni proprie. Si conclude che anche Q_∞ è un punto semplice con tangente alla curva la retta di equazione $y = -2x$.

3. Determinare la retta s per il punto $P(1,-1,0)$ parallela al piano π di equazione $x - 2z - 3 = 0$ ed incidente la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = -z + 4 \end{cases}$$

La retta cercata si ottiene come intersezione del piano per P parallelo a π e del piano per P contenente la retta r.
L'equazione del primo piano si ottiene da $x - 2z + k = 0$ imponendo il passaggio per P, quindi $x - 2z - 1 = 0$.
Poichè la retta cercata deve essere incidente la retta r, dovrà appartenere ad un piano del fascio di asse tale retta, quello che in più contiene anche il punto P:

$$x - 2z - 3 + k(y + z - 4) = 0,$$

quindi $k = -\frac{2}{5}$.
Segue che la retta cercata ha equazioni

$$\begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ 5x - 2y - 12z - 7 = 0 \end{cases}$$

4. Determinare, se esiste, un vettore parallelo ai piani $\pi : x - y + 3z = 0$ e $\sigma : 2x + 3z + 1 = 0$, avente modulo $\sqrt{19}$.

Sia $v = (a, b, c)$ il vettore cercato, le condizioni di parallelismo di v con i piani dati forniscono il sistema lineare

$$\begin{cases} a - b + 3c = 0 \\ 2a + 3c = 0 \end{cases} .$$

Si ha

$$a = -\frac{3}{2}c, \qquad b = \frac{3}{2}c,$$

allora lo spazio delle soluzioni del sistema è

$$S_0 = \{(-3c, 3c, 2c) : c \in R\}$$

e di conseguenza $v = (-3c, 3c, 2c)$. Il modulo di tale vettore vale $|v| = \sqrt{9c^2 + 9c^2 + 4c^2} = \sqrt{22c^2}$. Da $\sqrt{22c^2} = \sqrt{19}$, si ricava $c = \pm\sqrt{\frac{19}{22}}$, pertanto uno dei vettori richiesti è $v = (-3\sqrt{\frac{19}{22}}, 3\sqrt{\frac{19}{22}}, 2\sqrt{\frac{19}{22}})$.