DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE ED AMBIENTALE

Corso di Laurea Ing. Civile

Appello di GEOMETRIA del 31.08.2015

---

1. Determinare se esiste un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tale che

$$L(1,0,0) = (4,5,-2),\ L(0,1,0) = (-2,-2,1),$$

$$L(1,0,-1) = (5,6,-3),\ L(1,3,0) = (-2,-1,1),\ .$$

In caso affermativo studiare L.

I vettori $(1,0,0),(0,1,0),(1,0,-1)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$, pertanto esiste un'unica applicazione lineare L: $\mathrm{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$L(1,0,0) = (4,5,-2),\ L(0,1,0) = (-2,-2,1),\ L(1,0,-1) = (5,6,-3).$$

Per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$(x,y,z) = (x+z)(1,0,0) + y(0,1,0) - z(1,0,-1),$$

quindi

$$L(x,y,z) = (x+z)(4,5,-2) + y(-2,-2,1) - z(5,6,-3) =$$

$$= (4x - 2y - z, 5x - 2y - z, -2x + y + z).$$

Da notare che anche i vettori $(4,5,-2),(-2,-2,1),(5,6,-3)$ sono linearmente indipendenti, pertanto l'applicazione trovata risulta un isomorfismo. Si ha poi

$$L(1,3,0) = (-2,-1,1)$$

ed il problema ha risposta positiva.

2. Discutere e risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} (2\lambda+1)x+(\lambda+1)y+3\lambda z=\lambda \\ (2\lambda-1)x+(\lambda-2)y+(2\lambda-1)z=\lambda+1 \\ 3\lambda x+2\lambda y+(4\lambda-1)z=1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale λ.

La matrice A del sistema dato ha determinante $D(A) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$. Allora per tutti i valori di $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq \pm 1$, il sistema è di Cramer ed ammette l'unica soluzione

$$(\frac{\lambda(2\lambda-7)}{\lambda^2-1}, \frac{-3\lambda}{\lambda+1}, \frac{4\lambda+1}{\lambda^2-1}).$$

Per $\lambda = 1$ il rango di A e della matrice completa $\tilde{A}$ coincidono e valgono 2. Allora il sistema ha un insieme di soluzioni di dimensione 1

$$S = (1,-1,0) + < (-1,0,1) > .$$

Per $\lambda = -1$ si ha $rang A = 2$ e $rang \tilde{A} = 3$, cosicchè il sistema non ha soluzioni

3. Determinare le equazioni del cambiamento di riferimento nel piano da $R(O,x,y)$ a $R(O',x',y')$ e viceversa, essendo noto che
- R ed R' sono cartesiani ortogonali ed equiversi,
- O ha coordinate $(1,2)$ in R',
- la retta $r : \sqrt{2}y+3=0$ ha equazione $x'+y'=0$ in R'.

Le equazioni del cambiamento di riferimento da R a R' si scrivono

$$\begin{cases} x' = b_1 + b_{11}x + b_{12}y \\ y' = b_2 + b_{21}x + b_{22}y \end{cases}.$$

Si ha subito $(b_1,b_2) = (1,2)$. Dalla terza condizione segue che le equazioni $\sqrt{2}y+3=0$ ed $(b_{11}+b_{21})x + (b_{12}+b_{22}) + 3 = 0$ devono essere equivalenti, pertanto

$$b_{21} = -b_{11} \quad \text{e} \quad b_{12} = \sqrt{2} - b_{22}.$$

La condizione di ortogonalità tra gli assi $x' = 0$ ed $y' = 0$ fornisce

$$(\sqrt{2}\, b_{22} - 1^2) = 0.$$

Le condizioni sopra insieme alla condizione

$$D \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = 1$$

conducono alle equazioni

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x + \frac{\sqrt{2}}{2}\, y + 1 \\ y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, x + \frac{\sqrt{2}}{2}\, y + 2 \end{cases} .$$

Risolvendo poi il sistema lineare sopra nelle incognite x, y si ottengono le equazioni del cambiamento di riferimento da R' a R:

$$\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\, x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\, y' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\, x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\, y' - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} .$$