Dipartimento di Ingegneria Civile ed Ambientale

Corso di Laurea Ingegneria Civile

Appello di GEOMETRIA del 31.08.2016

---

1. Sia $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'applicazione

$$L(M) = AM + 2BM,$$

essendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare nucleo ed immagine di L. Determinare inoltre $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L)$, essendo $\mathcal{B}$ la base standard di $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Si ha:

$$L(M+N) = A(M+N) + 2B(M+N) =$$
$$= (AM + 2BM) + (AN + 2BN) = L(M) + L(N)$$
$$L(\alpha M) = A(\alpha M) + 2B(\alpha M) =$$
$$= \alpha(AM + 2BM) = \alpha L(M),$$

pertanto l'applicazione è lineare.
posto

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

si ha

$$L(M) = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ -z & -t \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -x & -y \\ x-z & y-t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -x+z & -y+t \\ 2x-3z & 2y-3t \end{pmatrix}.$$

Da

$$\begin{pmatrix} -x+z & -y+t \\ 2x-3z & 2y-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si ottiene il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - t = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ 2y - 3t = 0 \end{cases},$$

che ammette la sola soluzione nulla. Allora l'applicazione L è iniettiva, pertanto un isomorfismo.
Si ha poi

$$L(E_{11}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -1E_{11} + 0E_{12} + 2E_{21} + 0E_{22},$$

così

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} -1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 2 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}.$$

2. Discutere ed evgentualmente risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 3y = k \\ 2x + 3y = -k \\ kx - 2y = 1 \end{cases},$$

al variare del parametro reale k.

La matrice completa del sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & k \\ 2 & 3 & -k \\ k & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo per tutti i valori di k, tranne $k = -\frac{3}{2}$. Allora, per ogni $k \neq -\frac{3}{2}$ il sistema non ha soluzioni. Nel caso $k = -\frac{3}{2}$ . . . .

3. Considerata la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 1 = 0,$$

provare che essa è degenere e determinarne le componenti.

La matrice della conica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ha evidentemente rango pari a 1, pertanto la conica è doppiamente degenere. Da

$$x^2 + 4y^2 - 4xy = (x - 2y)^2$$

si ottiene che la conica deve avere equazione del tipo

$$(x - 2y + h)^2 = 0,$$

cioè

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 2hx - 4hy + h^2 = 0.$$

Allora $h = 1$ è la conica è costituita dalla retta $r : x - 2y + 1$ contata due volte.