Prova scritta di Geometria 2 / Matematica discreta - 14.09.2018 -

- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Studiare la diagonalizzabilità/triangolabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice data ha un unicio autovalore $\lambda = 1$ di molteplicità 3 ed autospazio relativo $V_\lambda =< (-1, -2, 1) >$, pertanto non è diagonalizzabile. Si può comunque triangolarla in $\mathbb{C}$.
Scegliamo, ad es., la base di $\mathbb{C}^3$

$$\mathcal{B} = \{(-1, -2, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Considerata l'applicazione

$$L_A(x, y, z) = (4x - 2y - z, 5x - 2y - z, -2x + y + z),$$

si ha

$$B = M_\mathcal{B}(L_A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideriamo la sottomatrice $B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha ancora come autovalore $\lambda = 1$ di molteplicità 2 ed autospazio relativo $V_\lambda =< (1, -1) >$. Consideriamo la base

$$\mathcal{B}' = \{(1, -1), (1, 0)\}$$

di $\mathbb{C}^2$ e quindi

$$M_\mathcal{C}^{\mathcal{B}'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e costruiamo le matrici

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)Z.$$

U è la matrice che triangola la matrice data.

2. Considerate in S_8 le permutazioni

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 5 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

determinarne periodo e segno. Riconoscere che esse sono coniugate e determinare la permutazione coniugante,

---

3. Ridurre a forma canonica la forma quadratica

$$f(X) = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)$$

per $X \in \mathbb{R}^3$.
