Prova scritta di
Matematica Discreta

- 15.09.2017 -

- Dipartimento di Ingegneria -

---

1. Provare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile; triangolarla nel campo dei complessi.

La matrice ha gli autovalori 1 *e* 2*, il primo di molteplicità* 1*, il secondo di molteplicità* 2 *con autospazi relativi* $< (1,1,0) >$ *e* $< (1,-1,0) >$*. La matrice non si diagonalizza ma si triangola nel campo dei complessi. Basta allora considerare, ad es., la base di* $\mathbb{C}^3$ *data da*

$$B = \{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1\})$$

ottenendo che la matrice $M_B^C A M_C^B$ *è triangolare superiore.*

2. Sia $\tau = (1457)(236) \in S_7$. Determinare, se esistono, elementi di periodo $4, 5$ e 6 nel sottogruppo $< \tau >$.

Il sottogruppo $< \tau >$ *ha ordine* 12*, pertanto non possiede elementi di periodo* 5*. Per trovare elementi di periodo* 4 *o* 6 *si devono determinare gli elementi di* $< \tau >$ *...*

---

3. Provare per induzione le seguenti relazioni:

(1) $n^2 \ > \ 2n+1, \quad \forall\, n > 5.$

(2) $2^n \ > \ n^2, \qquad\quad \forall\, n > 5.$

[*sugg.: usare la (1) per provare la (2)*]

- (1) per $n = 5$ la relazione è vera. Supponiamo che sia vera per n e proviamo che

$$(n+1)^2 \ > \ 2(n+1)+1.$$

Si ha

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > 2n+1+2n+1 = 2n+2n+2 = 2(n+1)+2n > 2(n+1)+1.$$

- (2) per $n = 5$ la relazione è vera. Supponiamo che sia vera per n e proviamo che

$$2^{n+1} \ > \ (n+1)^2.$$

$$(n+1)^2 \ > \ 2(n+1)+1.$$

Si ha

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 < 2^n+2n+1 < 2^n+n^2 < 2^n+2^n = 22^n = 2^{n+1}.$$