Prova scritta di Geometria 2 / Matematica discreta - 16.02.2018 -

- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice è ortogonale (ed anche simmetrica). pertanto si diagonalizza i $\mathbb{C}$ tramite una matrice ortogonale. Il polinomio caratteristico della matrice è $p_A(t) = (t^2 - 1)^2$. Dunque gli autovalori di A sono $1, -1$ ciascuno con moteplicità 2. Per quanto riguarda gli autospazi, essi sono

$$V_1 =< (1,0,0,1), (0,1,1,0) > \quad \text{e} \quad V_{-1} =< (1,0,0,-1), (0,1,-1,0) >,$$

entrambi dimensione 2. La base di $\mathbb{C}^4$ fornita dai precedenti vettori, già ortogonale, si normalizza ottenendo

$$B = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}.$$

La matrice ortonormale diagonalizzante è allora

$$M_C^B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

con inversa che coincide con la trasposta.

2. In $\mathbb{C}^3$ si costruisca il prodotto Hermitiano rispetto al quale la seguente base risulti ortonormale

$$B = \{(i, 0, 0), (1, 0, i), (1, 1, -1)\}.$$

Se X è un vettore di $\mathbb{C}^3$, sia (a_X, b_X, c_X) la terna delle sue coordinate su B. Allora il prodotto Hermitiano " $*$ "cercato è dato da

$$X * Y = (a_X, b_X, c_X) \cdot (a_Y, b_Y, c_Y),$$

ove a secondo membro si intende " $\cdot$ " il prodotto Hermitiano usuale in $\mathbb{C}^3$.

3. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ definita da

$$f(X) = 25x_1^2 - 7x_2^2 + 7x_3^2 + 48x_2x_3.$$

Ridurla a forma canonica e decidere se è definita positiva.

La matrice della forma quadratica è

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 24 \\ 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}$$

con polinomio caratteristico $p_A(t) = -(t-25)^2(t+25)$, quindi i suoi autovalori sono 25 con molteplicità 2 e -25 con molteplicità 1. Allora la forma canonica cercata sarà

$$\phi(X') = 25{x'_1}^2 + 25{x'_2}^2 - 25{x'_3}^2,$$

la quale è evidentemente indefinita. Per determinare il cambiamento di coordinate da "X" ad "X' " si deve trovare una base otonormale di autovettori ...