PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 2 / MATEMATICA DISCRETA - 20.07.20187 -

- CORSO DI LAUREA INGEGNERIA INFORMATICA ED ELETTRONICA -

---

1. Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

determinare i valori $k \in \mathbb{R}$ per cui essa è diagonalizzabile e, nel caso, diagonalizzarla.

Si ha $p_A(t) = (2-t)(1-t)^2$, pertanto gli autovalori sono

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.$$

Per determinare l'autospazio dell'autovalore 1 si ottiene il sistema

$$\begin{cases} k(y+z) = 0 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

Allora:

- se $k = 0$ si ha $V_1 =< (1,0,-1),(0,1,0 >$ e la matrice è diagonalizzabile.

...

- se $k \neq 0$ si ha $V_1 =< (1,1,-1) >$ e la matrice non è diagonalizzabile.

...

2. Dimostrare per induzione le seguenti relazioni:

(a) $n^2 > 2n+1$, per ogni $n \geq 3$,
(Sugg.: è sempre $2n+1 \geq 7$ ...)

(b) $2^n > n^2$, per ogni $n \geq 5$.
(Sugg.: usare la (a))

(a) Per $n = 3$ la relazione è vera.
Supponiamo $n^2 > 2n + 1$. Allora:

$$(n{+}1)^2 = n^2{+}2n{+}1 > 2n{+}1{+}2n{+}1 > 2n{+}1{+}7 = 2n{+}8 = 2(n{+}1){+}6 > 2(n{+}1){+}1.$$

Ciò prova la relazione per ogni $n \geq 3$.

(b) Per $n = 5$ la relazione è vera.
Supponiamo $2^n > n^2$. Allora:

$$2^{(n+1)} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Ciò prova la relazione per ogni $n \geq 5$.

3. Nell'insieme $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, ove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, si consideri l'operazione data da

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bc + d).$$

Provare che $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \cdot)$ è un gruppo non abeliano.

È facile vedere che l'operazione data ammette come elemento neutro la coppia $(1, 0)$ ed è inoltre associativa.
Da $(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0)$ si ricava

$$(ax, bx + y) = (1, 0)$$

quindi

$$x = a^{-1}, \quad y = -ba^{-1}.$$

Si ha poi anche

$$(a^{-1}, -ba^{-1}) \cdot (a, b) = (1, 0),$$

così $(a, b)^{-1} = (a^{-1}, -ba^{-1})$. Si ha quindi una struttura di gruppo, non abeliano poichè, ad es.,

$$(1, 1) \cdot (2, 0) = (2, 2), \quad (2, 0) \cdot (1, 1) = (2, 1).$$