Prova scritta di Geometria 2 / Matematica discreta - 21.06.2019 -

- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Determinare la forma canonica della forma quadratica definita dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice data è simmetrica reale ed ammette i tre autovalori $\lambda = 0, 1, 2$. Si ricava una base di autovettori per $\mathbb{R}^3$: $\{(0,1,1),(1,0,0),(0,1,-1)\}$ che è già ortogonale. Normalizzando si ha la base

$$\mathcal{B} = \{(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0,0), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

La forma quadratica indotta da A è

$$q(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_2,x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2.$$

Posto $(x_1,x_2,x_3)_{\mathcal{B}} = (x_1', x_2', x_3')$, da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

si ottiene il cambio di coordinate che permette di scrivere

$$q(x_1', x_2', x_3') = {x_1'}^2 + 2{x_2'}^2.$$

2. Considerata la permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 9 & 4 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$

se ne determini

- periodo e parità,
- la coniugata per mezzo di $\sigma = (13572)$.

Troppo facile!

3. Sia F un campo finito con unità moltiplicativa u. Si provi che per ogni r, s interi positivi, vale la relazioine

$$(rs)u = (ru)((ru)(su)).$$

Fissato r, procediamo per induzione su s.
- se $s = 1$ si ha (r1)u=ru=(ru)u=(ru)(1u), quindi la formula vale,
si supponga che sia vero $(rs)u = (ru)(su)$ e consideriamo $[r(s+1)]u$.
si ha

$$[r(s+1)]u = (rs+r)u = (rs)u + ru = \text{per l'ipotesi induttiva} =$$

$$= (ru)(su) + ru = (ru)(su+u) = (ru)(s+1)u,$$

che conclude la dimostrazione.