Prova scritta di Matematica Discreta

- 25.07.2017 -

- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Studiare la diagonalizzabilità della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

È immediato osservare che se $k = 0$, la matrice ha determinante nullo, pertanto non è diagonalizzabile. È triangolare superiore.
Se $k = 2$, la matrice è simmetrica, pertanto si diagonalizza per mezzo di una matrice unitaria...
Nel caso generale gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4k}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4k}}{2}.$$

Allora:
- se $k = -\frac{9}{4}$ si ha l'autovalore $-\frac{3}{2}$ di molteplicità 2, quindi è necessario studiare il relativo autospazio,...
- se $k > -\frac{9}{4}$ ci sono tre autovalori reali distinti e la matrice si diagonalizza in $\mathbb{R}$.
- se $k < -\frac{9}{4}$ ci sono tre autovalori complessi distinti e la matrice si diagonalizza in $\mathbb{C}$.

2. In $\mathbb{R}^4$ determinare il prodotto scalare rispetto al quale i vettori

$$(1, 0, 1, 0), \ (0, 2, 0, 2), \ (1, 0, 0, 1), \ (1, 1, 1, 0),$$

siano una base ortonormale. Verificare poi se tale prodotto è degenere oppure no.

Sia B la base costituita dai vettori assegnati. Se $X \in \mathbb{R}^4$ poniamo

$$X_B = (a_X, b_X, c_X, d_X)$$

la quaterna delle coordinate di X su B. Il prodotto scalare richiesto è definito come segue

$$X \cdot Y = a_X a_Y + b_X b_Y + c_X c_Y + d_X d_Y.$$

Una volta ottenuto il prodotto scalare, basta osservare il determinante della sua matrice per decidere se è non degenere o meno.

3. Ridurre a forma canonica la forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$q(X) = 2x_1x_3 - 2x_2^2, \quad X^t = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$