Prova finale di Matematica discreta

\- 28.05.2018 -

\- Corso di Laurea Ingegneria Informatica ed Elettronica -

---

1. Dopo aver provato che la matrice A non è diagonalizzabile, triangolarla.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A non è diagonalizzabile poichè ha l'unico autovalore 2 di molteplicità 3 con autospazio relativo il sottospazio $< (1,0,0) >$ di $\mathbb{C}^3$. Si consideri, ad es., la base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,-1,1), (0,0,1)\}$$

di $\mathbb{C}^3$. Considerato l'endomorfismo $L_A(X) = AX = (2x - y + z, 2y, 3y + 2z)$ di $\mathbb{C}^3$, si ottiene

$$B = M_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

e sia

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Triangoliamo B_{11}: anche essa ha come autovalore 2 di molteplicità 2 ed autospazio relativo $< (0,1) > \subset \mathbb{C}^2$. Consideriamo la base

$$\mathcal{B}_{11} = \{(0,1), (1,1)\}$$

di $\mathbb{C}^2$ e poniamo

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene la triangolazione

$$U^{-1}\ B\ U = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

essendo $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)\ A\ M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

2. Costruire una base ortonormale di $\mathbb{C}^3$ a partire dai vettori

$$(1, -i, 0),\ (1, 0, 1)$$

e verificare che la matrice del cambiamento di base dalla base canonica a quella ottenuta è unitaria.

Posto $v_1 = (1, -i, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, ortogonalizziamo questa coppia di vettori:

$$w_1 = v_1,$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, -i, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, 1).$$

All coppia $(1, -i, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, 1)$ basta ora aggiungere un terzo vettore linearmente indipendente con essi, ad es. $(0, 0, 1)$ e considerare

$$w_3 = (0, 0, 1) - \frac{(0, 0, 1) \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{(0, 0, 1) \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 =$$

$$= (0, 0, 1) - \frac{2}{3}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}i, 1) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}i, -\frac{2}{3}).$$

Si ha poi

$$||w_1|| = \sqrt{2}, \quad ||w_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad ||w_3|| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

La base richiesta è in questo caso quella costituita dai vettori

$$\mathcal{B} = \{\frac{w_1}{||w_1||}, \quad \frac{w_2}{||w_2||}, \quad \frac{w_3}{||w_3||}\},$$

i quali forniscono anche le colonne della matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id)$ la quale è pertanto unitaria.

3. In S_8 si determini il sottogruppo H generato dalla permutazione

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 6 & 1 & 8 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare in H le permutazioni eventualmente coniugate con τ e verificare se H è normale in in S_8.

E' $\tau = (1364)(258)$ di periodo 12, pertanto il sottogruppo di S_8 generato da τ contiene oltre a τ ed alla permutazione identica le seguenti permutazioni

$$\tau^2 = (16)(34)(285),\ \tau^3 = (1463),\ \tau^4 = (258),\ \tau^5 = (1364)(285),$$

$$\tau^6 = (16)(34),\ \tau^7 = (1463)(258),\ \tau^8 = (285),\ \tau^9 = (13)(64),$$
$$\tau^{10} = (16)(34)(258),\ \tau^{11} = (1463)(285).$$

Poichè due permutazioni sono coniugate quando hanno la stessa struttura in cicli, le coniugate di τ in H sono τ^5, τ^7 e τ^{11}. Si vede poi facilmente che H non è sottogruppo normale, infatti, ad es.,

$$(17)^{-1}\tau(17) = (258)(3647) \notin H.$$

4. Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze

$$\begin{cases} 2x \equiv_7 5 \\ 3x \equiv_{13} 2 \end{cases}.$$

Entrambe le congruenze sono risolubili, infatti

$$[2x] = [5] \Rightarrow [2][x] = [5] \Rightarrow [x] = [2]^{-1}[5] = [4][5] = [20] = [6],$$

in modulo 7, e

$$[3x] = [2] \Rightarrow [3][x] = [2] \Rightarrow [x] = [3]^{-1}[2] = [9][2] = [18] = [5],$$

in modulo 13. Allora il sistema dato equivale al sistema

$$\begin{cases} x \equiv_7 6 \\ x \equiv_{13} 5 \end{cases}.$$

Poichè $1 = 2 \cdot 7 + (-1) \cdot 13$, una soluzione particolare del sistema è

$$u = 5 - (5 - 6)(-1) \cdot 13 = -8$$

mentre la soluzione generale è data da $s = -8 + 7 \cdot 13k,\ k \in \mathbb{Z}$. Si noti che

$$[-8] = -[8] = -[1] = [6],\ mod\ 7,$$

e

$$[-8] = -[8] = [5],\ mod\ 13.$$