0.1 Cardinalità di un insieme

Definizione 0.1.1. *Nella classe* Set *di tutti gli insiemi si ponga la seguente relazione:*

$$A \sim B \Leftrightarrow \textit{esiste una biiezione } A \to B.$$

Tale relazione è evidentemente una relazione di equivalenza ed una classe di equivalenza si chiama una cardinalità. Se $A \sim B$ *si dice che gli insiemi* A *e* B *hanno la stessa cardinalità e si scrive* $|A| = |B|$.

Se A e B sono insiemi finiti, allora essi hanno la stessa cardinalità se e solo se hanno lo stesso numero di elementi, quindi la cardinalità di un insieme di n elementi è n.
Si noti la seguente proprietà degli insiemi finiti:
se A ***è un insieme finito, allora non può esistere una biiezione tra*** A ***ed un suo sottinsieme proprio***.

Se $\mathbb{P}$ indica il sottinsieme di $\mathbb{N}$ costituito da tutti i numeri pari, la funzione

$$\mathbb{N} \to \mathbb{P}, \quad n \mapsto 2n,$$

è invece una biiezione. Questo fatto ci allerta su possibili "stranezze" delle cardinalità di insiemi non finiti. E' anche possibile infatti provare che tutti gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità, esistono cioè biiezioni $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ed $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$.
La cardinalità di $\mathbb{N}$ si chiama la ***cardinalità del numerabile*** e si scrive

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \ (aleph\ zero).$$

Se A, B sono due insiemi, allora diremo che la cardinalità del primo è minore della cardinalità del secondo, scritto

$$|A| < |B|,$$

se esiste una funzione iniettiva $A \to B$, ma non c'è nessuna biiezione tra di essi.

ESERCIZIO. Sia A un insieme finito e si consideri l'insieme $\underline{2} = \{0, 1\}$. Si ponga

$$\underline{2}^A = \{tutte\ le\ funzioni\ A \to \underline{2}\}.$$

Si provino per induzione sulla cardinalità di A i seguenti fatti:

1. $|\underline{2}^A| = 2^{|A|}$,
2. $2^{|A|} = |\mathcal{P}(A)|$, essendo $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A,
3. $|A| < 2^{|A|}$.

E' da notare che le tre relazioni elencate sopra valgono in realtà per un insieme qualunque A, anche non finito. In particolare, si ha:

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

La cardinalita di $\mathbb{R}$ si indica $c = 2^{\aleph_0}$ e si chiama la *cardinalità del continuo*. Risulta quindi

$$\aleph_0 < c.$$

Nel seguito tratteremo soltanto di insiemi finiti.

Teorema 0.1.2. *(della Somma)*
Se A e B sono due insiemi disgiunti, si ha:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Dim. Supponiamo $B \neq \emptyset$. Per induzione sulla cardinalità di B.
Se $|B| = 1$, allora $B = \{b\}$ e

$$|A \cup B| = |A \cup \{b\}| = |A| + 1 = |A \cup B|.$$

Supponiamo che la formula valga per $|B| = n$. Se $|B| = n + 1$, allora potremmo scrivere $B = B' \cup \{b\}$, con $|B'| = n$. Otteniamo

$$|A \cup B| = |A \cup B' \cup \{b\}| = |A \cup B'| + 1 = (ipotesi\ induttiva) =$$
$$= |A| + |B'| + 1 = |A| + |B|.$$

$\square$

Teorema 0.1.3. *(del Prodotto)*
Se A e B sono due insiemi non vuoti, si ha:

$$|A \times B| = |A| \times |B|.$$

Dim. Per induzione sulla cardinalità di B.
Se $|B| = 1$, allora $B = \{b\}$ ed esiste una evidente biiezione $A \to A \times \{b\}$. Quindi

$$|A \times B| = |A \times \{b\}| = |A| + 1 = |A| \times |B|.$$

Supponiamo che la formula valga per $|B| = n$. Se $|B| = n + 1$, allora potremmo scrivere $B = B' \cup \{b\}$, con $|B'| = n$. Otteniamo

$$|A \times B| = |A \times (B' \cup \{b\})| = |(A \times B') \cup (A \times \{b\})| =$$

$$(per\ il\ teorema\ della\ somma)$$

$$= |(A \times B')| + |(A \times \{b\})| =$$

$$(per\ l'ipotesi\ induttiva)$$

$$= (|A| \times |B'|) + (|A| \times 1) = |A| \times (|B'| + 1) = |A| \times |B|.$$

□

Teorema 0.1.4. *(del Quoziente)*
Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza sull'insieme A tale che tutte le classi di equivalenza hanno la stessa cardinalità r, si ha:

$$|A| = |A/\mathcal{R}| \times r.$$

Dim. C'è solo da notare che l'insieme quoziente $A/\mathcal{R}$ ha per elementi le classi di equivalenza in A rispetto ad $\mathcal{R}$. □

Nel seguito denotiamo con $I_k,\ k \in \mathbb{N}$ l'insieme

$$I_k = \{m \in \mathbb{N} \ \mid\ 1 \leq m \leq k\}.$$

Se A è un insieme di cardinalità n e $k \leq n$, ci poniamo il problema di contare il numero $F_{n,k}$ delle possibili funzioni da I_k ad A, ovvero determinare

$$F_{n,k} = |\{f : I_k \to A \mid \forall f\}|.$$

Definire una funzione $f : I_k \to A$ significa scegliere in A un elemento da associare a ciascun elemento di I_k. Poichè le funzioni in questione sono di tipo generale e non ci sono restrizioni, cioè sono ammesse ripetizioni, ogni volta abbiamo a disposizione esattamente n possibilità di scelta: allora è chiaro che

$$F_{n,k} = n \times \cdots \times n \ (k\ volte) = n^k,$$

e questo è il numero delle ***disposizioni con ripetizione di*** n ***elementi "a*** k ***a*** k***"***.

Nelle stesse ipotesi del problema precedente, chiamiamo ***disposizioni semplici di*** n ***elementi "a*** k ***a*** k***"***, le funzioni iniettive $f : I_k \to A$ e poniamo

$$D_{n,k} = |\{f : I_k \to A \mid \forall f\ iniettiva\}|.$$

In questo caso, per definire una tale f abbiamo n scelte per $f(1)$, poi $n-1$ scelte per $f(2)$,..., infine $n-k+1$ scelte per $f(k)$, quindi

$$D_{n,k} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1).$$

Ancora nelle stesse ipotesi sopra, ci proponiamo di contare il numero dei sottinsiemi di A aventi k elementi. Tale numero, denotato $C_{n,k}$, è il numero dell ***combinazioni di*** n ***elementi presi*** k ***alla volta***.
Si consideri l'insieme di tutte le disposizioni semplici degli n elementi "a k a k" (ovvero di tutti i sottinsiemi totalmente ordinati di A contenenti k elementi). In tale insieme si ponga la relazione che rende equivalenti due tali disposizioni quando contengono gli stessi elementi: è una relazione di equivalenza. Ogni classe di equivalenza contiene evidentemente tanti elementi quante sono le possibili permutazioni di k elementi, quindi ogni classe di equivalenza ha esattamente $k!$ elementi. Dal teorema del

quoziente si ottiene allora

$$D_{n,k} = C_{n,k} \times k!$$

quindi

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

$\binom{n}{k}$ è il coefficiente binomiale "n su k".