$\square$

Esempi 1.2.9.

(1) La categoria $\mathbf{Vect}_K^{fd}$ degli spazi vettoriali de dimensione finita sul campo K, con base fissata, è equivalente alla categoria delle matrici $\mathbb{N}_K$. Il funtore $dim : \mathbf{Vect_K} \to \mathbb{N}_K$ che associa ad ogni spazio vettoriale la sua dimensione e ad ogni funzione lineare $L : (V, \mathcal{B}) \to (W, \mathcal{B}')$ la matrice $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(L)$ è una equivalenza.

(2) Il funtore di spazio duale $D : \mathbf{Vect_K} \to \mathbf{Vect_K}$, $D(V) = V^*$ è una equivalenza, non un isomorfismo, infatti $V \cong V^{**}$ ma $V \neq V^{**}$.

(3) Sia $(S, \leq)$ un preordine, considerato come categoria piccola. Definiamo la relazione
$$x \sim y \Leftrightarrow [x \leq y \quad \text{e} \quad y \leq x].$$
Posto $\tilde{S} = S/\sim$ e $[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \leq y$, si ha che $(\tilde{S}, \leq)$ e un insieme parzialmente ordinato. La funzione quoziente $P_S : S \to \tilde{S}$ è un funtore, essendo monotona, e realizza una equivalenza. Allora ogni preordine è equivalente (come categoria) ad un insieme ordinato.

(4) Se $\mathbf{C}$ è una qualunque categoria, il suo scheletro $Sk(\mathbf{C})$ è la sottocategoria piena che si ottiene da $\mathbf{C}$ prendendo come oggetti un rappresentante per ciascuna classe di isomorfismo. Provare che ogni categoria è equivalente al suo scheletro e che due categorie sono equivalenti se e solo se i loro scheletri sono isomorfi.

(5) In generale non è vero che una categoria $\mathbf{C}$ sia equivalente alla sua duale. Infatti, nel caso della categoria degli insiemi si ha $\mathbf{Set}(*, S) \neq \mathbf{Set}(S, *)$, per ogni insieme $S \in \mathbf{Set}$ con più di un elemento, essendo $*$ l'insieme puntiforme.

1.3 Funtori Aggiunti.

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come la nozione di equivalenza tra categorie sia più debole di quella di isomorfismo. Introdurremo ora un concetto a sua volta più debole di quello di equivalenza: l'aggiunzione tra funtori. S. MacLane lo presenta con queste parole : "*Adjoint functors arise everywhere*."

Definizione 1.3.1. *Sia* $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore e sia* $X \in \mathbf{C}$. *Un* **morfismo** G**-universale** *per* X *è un morfismo* $u : X \to \mathsf{G}(Y)$ *di* $\mathbf{C}$ *con la seguente proprietà:*

- per ogni altro morfismo $f : X \to \mathsf{G}(Y')$ *esiste un unico morfismo* $\tilde{f} : Y \to Y'$ *in* $\mathbf{D}$ *tale che sia commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathsf{G}(Y) \arrow[d, "\mathsf{G}(\tilde{f})"] \\ & \mathsf{G}(Y') \end{tikzcd}$$

cioè $\mathsf{G}(\tilde{f}) \circ u = f$.
È chiaro che se $u : X \to \mathsf{G}(Y)$ *e* $u' : X \to \mathsf{G}(Y')$ *sono due morfismi* G*-universali per* X*, allora esiste un unico isomorfismo* $v : Y \to \mathsf{Y}'$ *tale che* $\mathsf{G}(v) \circ u = u'$.
Ser $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *è un funtotre, la nozione di morfismo* **morfismo** F**-couniversale** $v : \mathsf{F}(X) \to Y$ *per* $Y \in \mathbf{D}$ *si definisce dualmente.*

Definizione 1.3.2. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie. Una* **aggiunzione** *da* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$ *è una terna* $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$*, ove*

$$\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \quad e \quad \mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

sono due funtori (stessa varianza) e $\Phi = \{\Phi_{X,Y} \mid X \in \mathbf{C}, Y \in \mathbf{D}\}$ *è una famiglia di biiezioni*

$$\Phi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(X), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathsf{G}(Y)),$$

naturale in X *ed in* Y.

La **naturalità** di Φ significa che, per ogni $f : X \to X'$ in $\mathbf{C}$ e per ogni $g : Y \to Y'$ in $\mathbf{D}$, sono commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} Hom(\mathsf{F}(X),Y) \arrow[r, "\Phi_{C,Y}"] \arrow[d, "g\circ(-)"'] & Hom(X,\mathsf{G}(Y)) \arrow[d, "\mathsf{G}(g)\circ(-)"] \\ Hom(\mathsf{F}(X),Y') \arrow[r, "\Phi_{X,Y'}"'] & Hom(X,\mathsf{G}(Y')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Hom(\mathsf{F}(X'),Y) \arrow[r, "\Phi_{X',Y}"] \arrow[d, "(-)\circ F(f)"'] & Hom(X',\mathsf{G}(Y)) \arrow[d, "(-)\circ f"] \\ Hom(\mathsf{F}(X),Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"'] & Hom(X,\mathsf{G}(Y)) \end{tikzcd}$$

Se $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ è una aggiunzione, si dice che F **aggiunto a sinistra** di G e che G è **aggiunto a destra** di F.

Proposizione 1.3.3. *Sia* $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ *una aggiunzione da* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$. *Allora:*

(1) *Per ogni* $f : \mathsf{F}(X) \to Y$ *si ha* $\Phi_{X,Y}(f) = \mathsf{G}(f) \circ \eta_X$*, essendo*

$$\eta_X = \Phi_{X,Y}(1_{\mathsf{F}(X)}).$$

(2) $\eta_X : X \to \mathsf{GF}(X)$ *è un morfismo G-universale per* X.

(3) $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathbf{C}} : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathsf{GF}$ *è una trasformazione naturale, detta* **unità della aggiunzione**.

(4) η *definisce l'aggiunzione*.

Dim.
(1) Segue immediatamente dall commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} Hom(\mathsf{F}(X),\mathsf{F}(X)) \arrow[r, "\Phi_{X,\mathsf{F}(X)}"] \arrow[d, "f\circ(-)"'] & Hom(X,\mathsf{G}(\mathsf{F}(X))) \arrow[d, "\mathsf{G}(f)\circ(-)"] \\ Hom(\mathsf{F}(X),Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"'] & Hom(X,\mathsf{G}(Y)) \end{tikzcd}$$

(2) Segue dal fatto che $\Phi_{X,\,Y}$ è una biiezione.
(3) Si deve provare che per ogni morfismo $f : X \to X'$ in $\mathbf{C}$ c'è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(f))"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \end{tikzcd} \quad ,$$

cioè $\mathsf{G}(\mathsf{F}(f)) \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ f$. Quest'ultima uguaglianza equivale alla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} Hom(\mathsf{F}(X'), \mathsf{F}(X')) \arrow[r, "\Phi_{X', \mathsf{F}(X')}"] \arrow[d, "\mathsf{F}(f) \circ (-)"'] & Hom(X', \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))) \arrow[d, "f \circ (-)"] \\ Hom(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(X')) \arrow[r, "\Phi_{X, \mathsf{F}(X')}"'] & Hom(X, \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))) \end{tikzcd} \quad ,$$

tenendo presente la (1).
(4) $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathbf{C}}$ è una trasformazione naturale in cui ogni η_X è un morfismo G-universale. Per ogni $X \in \mathbf{C}$ e per ogni $Y \in \mathbf{D}$ poniamo

$$\Phi_{X,Y} : Hom_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(X), Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathsf{G}(Y)),$$

definita da $\Phi_{X,Y}(f) = \mathsf{G}(f) \circ \eta_X$. Allora $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ è un'aggiunzione con unità di aggiunzione η. $\square$

Proposizione 1.3.4. *Sia* $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ *una aggiunzione da* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$. *Allora:*

(1) *Per ogni* $g : X \to \mathsf{G}(Y)$ *si ha* $\Phi^{-1}_{X,Y}(g) = \epsilon_Y \circ \mathsf{G}(g)$, *essendo*

$$\epsilon_Y = \Phi^{-1}_{G(Y),Y}(1_{\mathsf{G}(Y)}).$$

(2) $\epsilon_Y : \mathsf{FG}(Y) \to Y$ *è un morfismo* F-*couniversale per* Y.

(3) $\epsilon = (\epsilon_Y)_{Y \in \mathbf{D}} : \mathsf{FG} \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ *è una trasformazione naturale, detta* **counità della aggiunzione**.

(4) ϵ *definisce l'aggiunzione.*

Proposizione 1.3.5. *Gli aggiunti sono univocamente determinati a meno di equivalenze naturali.*

Dim. Siuano $\mathsf{F}, \mathsf{F}' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ due aggiunti a sinistra di $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ con unità di aggiunzione $\eta_X : X \to \mathsf{GF}(X)$, $\eta'_X : X \to \mathsf{GF}'(X)$, rispettivamente. Poichè η_X, η'_X sono morfismi G-universali per X, esiste un unico isomorfismo $\alpha_X : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}'(X)$ tale che $\mathsf{G}(\alpha_X) \circ \eta_X = \eta'_X$. Proviamo che $\alpha = (\alpha_X)_{X \,\in\, \mathbf{C}}$ è un isomorfismo naturale $\mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{F}'$. Sia $f : X \to X'$ un morfismo in $\mathbf{C}$ e si consideri il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X)) \arrow[ddd, "\mathsf{G}(\mathsf{F}'(f))"] \\
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[urr, "\eta'_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[ur, "\mathsf{G}(\alpha_X)"'] \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(f))"] & \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] \arrow[drr, "\eta'_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \arrow[dr, "\mathsf{G}(\alpha_{X'})"] & \\
 & & \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X'))
\end{tikzcd} .$$

dal quale si ricava:

$$\mathsf{G}(\mathsf{F}'(f)) \circ \mathsf{G}(\alpha_X) \circ \eta_X = \mathsf{G}(\mathsf{F}'(f)) \circ \eta'_X = \eta'_{X'} \circ f = \mathsf{G}(\alpha_{X'}) \circ \eta'_{X'} \circ f =$$
$$= \mathsf{G}(\alpha_{X'}) \circ \mathsf{G}(\mathsf{F}(f)) \circ \eta_X,$$

quindi

$$\mathsf{G}(\mathsf{F}'(f) \circ \alpha_X) \circ \eta_X = \mathsf{G}(\alpha_{X'} \circ \mathsf{F}(f) \circ \eta_X$$

che, per l'universalità, implica

$$\mathsf{F}'(f) \circ \alpha_X = \alpha_{X'} \circ \mathsf{F}(f).$$

□

Proposizione 1.3.6. *Sia* $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore. Se per ogni* $X \in \mathbf{C}$ *è data un morfismo* G*-universale* $\eta_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X))$, *allora esiste un unico funtore* $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *aggiunto a sinistra di* G.

Dim. Si noti che se $\eta_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X))$ e $\eta'_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X))$ sono due morfismi G-xuniversali per X, allora esiste un unico isomorfismo $\alpha_X : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}'(X)$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(\alpha_X)"] \\ X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_{X'}"'] & \\ & \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X)) \end{tikzcd}$$

L'ipotesi fornisce allora una corrispondenza $\mathsf{F} : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$. Se poi è dato un morfismo $f : X \to X'$ in $\mathbf{C}$, allora in corrispondenza di $\eta_{X'} \circ f : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))$ esiste un unico morfismo $a_f : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(X')$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(a_f)"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \end{tikzcd} \quad .$$

Definiamo $\mathsf{F}(f) = a_f$. Ci si rende conto facilmente che si ottiene un unico funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e di conseguenza una trasformazione naturale

$$\eta = (\eta_X)_{X \in \mathbf{C}} : 1_X \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}.$$

Per ogni $Y \in \mathbf{D}$, consideriamo ora il morfismo universale

$$\eta_{G(Y)} : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)).$$

In corrispondenza del morfismo identico $1_{\mathsf{G}(Y)} : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(Y)$ esiste allora un unico morfismo $\epsilon_Y : \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)) \to Y$ che commuta il triangolo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{G}(Y) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{G}(Y)}"] \arrow[dr, "1_{\mathsf{G}(Y)}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(G(Y))) \arrow[d, "\mathsf{G}(\epsilon_Y)"] \\
& \mathsf{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

Proviamo che $\epsilon = (\epsilon_Y)_{Y \in \mathbf{D}} : \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ è una trasformazione naturale, cioè per ogni $f : Y \to Y'$ è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)) \arrow[r, "\epsilon_Y"] \arrow[d, "\mathsf{F}(\mathsf{G}(f))"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y')) \arrow[r, "\epsilon_{Y'}"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{G}(Y) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{G}(Y)}"] \arrow[d, "\mathsf{G}(f)"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y))) \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(f)))"] \\
\mathsf{G}(Y') \arrow[r, "\eta_{\mathsf{G}(Y')}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y')))
\end{tikzcd}$$

Si ha :

$$\mathsf{G}(f) \circ \mathsf{G}(\epsilon_Y) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y)} = \mathsf{G}(f) \circ 1_{\mathsf{G}(Y)} = \mathsf{G}(f)$$

et

$$\begin{aligned}\mathsf{G}(f) = 1_{\mathsf{G}(Y')} \circ \mathsf{G}(f) = \mathsf{G}(\epsilon_{Y'}) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')} \circ \mathsf{G}(f) = \\ = \mathsf{G}(\epsilon_{Y'}) \circ \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(f))) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')},\end{aligned}$$

da cui

$$\mathsf{G}(f \circ \epsilon_Y) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')} = \mathsf{G}(\epsilon_{Y'} \circ \mathsf{F}(\mathsf{G}(f))) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')}.$$

Poichè $\eta_{\mathsf{G}(Y)}$ è un morfismo universale segue infine

$$f \circ \epsilon_Y = \epsilon_{Y'} \circ \mathsf{F}(\mathsf{G}(f)),$$

ovvero la commutatività del primo diagramma. È chiaro a questo punto che definendo una funzione

$$\phi_{X,Y} : Hom(\mathsf{F}(X), Y) \to Hom(X, \mathsf{G}(Y)),$$

$$\phi_{X,Y}(h) = \mathsf{G}(h) \circ \eta_X,$$

si ottiene una biiezione con inversa data da $\phi^{-1}_{X,Y}(g) = \epsilon_Y \circ \mathsf{F}(g)$. Rimane solo da verificare la naturalità di $\phi_{X,Y}$ per $X \in \mathbf{C}, Y \in \mathbf{D}$, per ottenere l'aggiunzione. $\square$

Nota 1.3.7.

- Una aggiunzione $\mathsf{F} \dashv \mathsf{G}$ si può equivalentemente descrivere assegnando le biiezioni di aggiunzione oppure le unità e counità di aggiunzione.
- Una aggiunzione è una equivalenza se e solo se le unità e counità di aggiunzione sono isomorfismi naturali.

Proposizione 1.3.8. *Si consideri il diagramma di funtori*

$$\mathbf{C} \underset{\mathsf{U}}{\overset{\mathsf{F}}{\rightleftarrows}} \mathbf{D} \underset{\mathsf{V}}{\overset{\mathsf{G}}{\rightleftarrows}} \mathbf{E}$$

ove $\mathsf{U} \dashv \mathsf{F}$ *e* $\mathsf{V} \dashv \mathsf{G}$. *Allora* $\mathsf{U} \circ \mathsf{V} \dashv \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$.

Dim. Per ogni $X \in \mathbf{C}$ e per ogni $Z \in \mathbf{E}$ si ha la composizione di biiezioni naturali

$$Hom(\mathsf{UV}Z, X) \xrightarrow{\Phi_{X,\mathsf{V}Z}} Hom(\mathsf{V}Z, \mathsf{F}X) \xrightarrow{\Psi_{\mathsf{F}X,Z}} Hom(Z, \mathsf{GF}X),$$

essendo $\{\Phi_{X,\mathsf{V}Z}\}$ e $\{\Psi_{\mathsf{F}X,Z}\}$ le biiezioni delle due aggiunzioni date. $\square$

Quindi la composizione di aggiunti è un aggiunto.