makeidx

ELEMENTI
di
CATEGORIE e TOPOLOGIA GENERALE

(work in progress)

L. Stramaccia

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Perugia

8 giugno 2020

Indice

Capitolo 1

Elementi di Teoria delle Categorie

1.1 Categorie, Funtori e trasformazioni Naturali.

Definizione 1.1.1. *Una* **categoria** $\mathbf{C}$ *è individuata dai seguenti dati:*

- *una* **classe** *di oggetti denotata* $\mathsf{Ob}\ \mathbf{C}$ *oppure* $|\mathbf{C}|$*,*
- *per ogni coppia di oggetti* $X, Y \in |\mathbf{C}|$*, un* **insieme** $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$*, anche denotato semplicemente* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *quando la categoria* $\mathbf{C}$ *sia sottintesa, i cui elementi sono i* **morfismi** *di* $\mathbf{C}$ *di dominio* X *e codominio* Y*, scritti* $f : X \to Y$*,* $X \xrightarrow{f} Y$*.*

sottoposti alle seguenti richieste:

- $\forall\ X, Y, Z \in |\mathbf{C}|$ *è assegnata una funzione*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f$$

  detta **composizione***,*

- *la composizione di morfismi è associativa,*

- $\forall\ X \in |\mathbf{C}|\ \exists\ 1_X : X \to X$ *con la proprietà che, se* $f : X \to Y$*, allora*

$$1_Y \circ f = f, \qquad f \circ 1_X = f.$$

1_X *è il* **morfismo identico** *o l'***identità** *di* X*.*

Una categoria $\mathbf{C}$ si dice **piccola** se $|\mathbf{C}|$ è un insieme.

$*\,*\,*$ Sarà il caso di notare che nella Teoria degli Insiemi in uso comune è necessario operare una distinzione tra "insiemi" e "classi" al fine di evitare inconvenienti logici (vedi Paradosso di Russel...). La totalità di tutti gli insiemi non può essere considerata un insieme, bens$\frac{1}{2}$ una classe.

L'**opposta** o **duale** di una categoria $\mathbf{C}$ è la categoria $\mathbf{C}^{op}$ avente gli stessi oggetti di $\mathbf{C}$ e morfismi definiti da $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X)$. In altre parole si passa da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}^{op}$ semplicemente invertendo il verso dei morfismi.
Come verificheremo in seguito, ogni affermazione/proposizione concernente una categoria $\mathbf{C}$ d? luogo ad una affermazione/proposizione duale, quella formulata in $\mathbf{C}^{op}$. Questo è il **Principio di Dualità** per la Teoria delle Categorie.

Una categoria $\mathbf{K}$ è una **sottocategoria** di $\mathbf{C}$ se

$$|\mathbf{K}| \subset |\mathbf{C}| \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\mathbf{C}(X, Y),$$

$\forall\ X, Y \in |\mathbf{K}|$. Ne caso in cui $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\mathbf{C}(X, Y)$, si dice che $\mathbf{K}$ è una **sottocategoria piena** di $\mathbf{C}$.

In seguito scriveremo semplicemente $X \in \mathbf{C}$ invece che $X \in |\mathbf{C}|$ per indicare un oggetto X della categoria $\mathbf{C}$.

Esempi 1.1.2.

(1) La categoria **Set** con oggetti tutti gli insiemi e morfismi le applicazioni tra di essi. La categoria $\mathbf{Set}_f$ con oggetti tutti gli insiemi finiti e loro applicazioni è una sottocategoria piena di **Set**.

(2) Le categorie **Gr**, **Rng**, **Fld** con oggetti, rispettivamente, tutti i gruppi, tutti gli anelli, tutti i campi e morfismi i loro relativi omomorfismi. La categoria **Ab** dei gruppi abeliani è una sottocategoria piena di **Gr**. In generale ogni struttura algebrica con i propri omomorfismi definisce la corrispondente categoria.

(3) La categoria $\mathbf{Vect}_K$, con oggetti gli spazi vettoriali sul campo K e morfismi le loro applicazioni lineari.

(4) La categoria **Met** degli spazi metrici e loro funzioni continue. La categoria **iMet** degli spazi metrici e morfismi le isometrie è una sottocategoria non piena di **Met**.

(5) Ogni monoide è una categoria con un solo oggetto.

(6) Un insieme preordinato o un preordine $(S, \leq)$ è un insieme dotato di una relazione "$\leq$" riflessiva e transitiva. Ogni preordine si può considerare come categoria piccola con oggetti gli elementi di S e morfismi definiti da

$$S(x, y) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \leq y.$$

(7) **Pos** è la categoria con oggetti gli insiemi parzialmente ordinati e morfismi le funzioni monotone.

(8) **Rel**, categoria delle relazioni, ha oggetti tutti gli insiemi, mentre un morfismo $f : A \to B$ è una relazione binaria $f \subset A \times B$. La composizione è l'usuale composizione di relazioni.

(9) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia K un campo. La categoria $\mathbb{N}_K$ ha oggetti tutti i numeri naturali mentre un morfismo $M : m \to n$ è una matrice $m \times n$ su K. La composizione di morfismi è la moltiplicazione "righe per colonne".

(10) Sia $\mathbf{C}$ una categoria e supponiamo che sia data una relazione di equivalenza "$\simeq$" per i morfismi di $\mathbf{C}$, in modo tale che:

1. se $f \simeq g$, allora f e g hanno lo stesso dominio e codominio,
2. se $f \simeq g : X \to Y$ e $h : U \to X, k : Y \to V$, allora risulta $f \circ h \simeq g \circ h$ e $k \circ f \simeq g \circ f$ (cioè la relazione è **compositiva**),

allora si ottiene una categoria $\mathbf{C}/\simeq$ con gli stessi oggeti di $\mathbf{C}$ e morfismi le classi di equivalenza di morfismi di $\mathbf{C}$.
$\mathbf{C}/\simeq$ è la **categoria quoziente** di $\mathbf{C}$ rispetto alla relazione considerata.

Definizioni 1.1.3. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo in* $\mathbf{C}$. *Si dice che:*

- *f è un* **monomorfismo** *se, per ogni $u, v : Z \to X$ tali che $f \circ u = f \circ v$ risulta $u = v$.*
- *f è una* **sezione** *se esiste $g : Y \to X$ con $g \circ f = id_X$.*
- *f è un* **epimorfismo** *se, per ogni $u, v : Y \to Z$ tali che $u \circ f = v \circ f$ risulta $u = v$.*
- *f è una* **retrazione** *se esiste $h : Y \to X$ con $f \circ h = id_Y$.*
- *f è un* **bimorfismo** *se è contemporaneamente mono ed epi.*
- *f è un* **isomorfismo** *se esiste $f^{-1} : Y \to X$ tale che $f^{-1} \circ f = id_X$ et $f \circ f^{-1} = id_Y$.*
- *f è un* **monomorfismo estremale** *(monoestremale) se è un monomorfismo e per ogni fattorizzazione $f = m \circ e$ con e un epimorfismo, segue che e è un isomorfismo.*
- *f è un* **epimorfismo estremale** *(epiestremale) se è un epimorfismo e per ogni fattorizzazione $f = m \circ e$ con m un monomorfismo, segue che m è un isomorfismo.*

É chiaro che ogni sezione è un monomorfismo e che ogni retrazione è un epimorfismo. In **Set**, **Gr** $\mathbf{Vect_K}$ vale anche il viceversa. In **Rng** l'inclusione $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ è un epimorfismo. In **Pos** considerati gli insiemi parzialmente ordinati $A = \{a, b \leq c\}$, $B = \{1 < 2 < 3\}$, la corrispondenza $a \mapsto 1$, $b \mapsto 2$, $c \mapsto 3$ fornisce un bimorfismo che non è un isomorfismo.

Proposizione 1.1.4.

(1) *epiestremale + monomorfismo = isomorfismo*

(2) *monoestremale + epimorfismo = isomorfismo*

(3) *un epimorfismo invertibile a sinistra è un isomorfismo*

(4) *un monomorfismo invertibile a destra è un isomorfismo*

Dim.
(1) Sia f un epiestremale ed un monomorfismo, allora dalla fattorizzazione

$f = id \circ f$ segue che f deve essere un isomorfismo. Analogamente per la (2).
(4) Sia f un monomorfismo per cui esiste g tale che $f \circ g = id$. Allora:

$$f \circ id = id \circ f = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f),$$

da cui $g \circ f = id$. Analogamente per la (3). □

Definizione 1.1.5. *Sia $\mathcal{A}$ una classe di morfismi della categoria $\mathbf{C}$.*

(1) *Se $\mathcal{A}$ è costituita da monomorfismi, un $\mathcal{A}$-**sottoggetto** di $Y \in \mathbf{C}$ è un morfismo $m : X \to Y$ con $m \in \mathcal{A}$.*

(2) *Se $\mathcal{A}$ è costituita da epimorfismi, un $\mathcal{A}$-**oggetto quoziente** di $X \in \mathbf{C}$ è un morfismo $q : X \to Y$ con $q \in \mathcal{A}$.*

(3) *La categoria $\mathbf{C}$ si dice $\mathcal{A}$-**well-powered**, risp. $\mathcal{A}$-**cowell-powered** se gli $\mathcal{A}$-sottoggetti, risp. gli $\mathcal{A}$-oggetti quoziente, di un qualunque oggetto di $\mathbf{C}$, costituiscono un insieme, a meno di isomorfismi.*

Per esempio, due $\mathcal{A}$-sottoggetti $m : U \to X$ ed $n : V \to X$ di $X \in \mathbf{C}$, si diranno isomorfi se esiste un isomorfismo $t : U \to V$ tale che $n \circ t = m$.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "t"'] & \\
& X \\
V \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

Definizione 1.1.6. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ sono due categorie. Un **funtore** (**covariante**)*

$$\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$$

è una funzione dalla classe di oggetti di $\mathbf{C}$ alla classe di oggetti di $\mathbf{D}$ tale che, per ogni $X, Y \in \mathbf{C}$, è definita una applicazione

$$\mathsf{F}_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y)),$$

che manda un morfismo $f : X \to Y$ di $\mathbf{C}$ in un morfismo $\mathsf{F}(f) : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(Y)$ di $\mathbf{D}$ e rispetta la composizione e le identità , cioè:

- $\mathsf{F}(g \circ f) = \mathsf{F}(g) \circ \mathsf{F}(f)$
- $\mathsf{F}(1_X) = 1_{\mathsf{F}(X)}$.

Esempi 1.1.7.

(1) Per ogni categoria $\mathbf{C}$ è dato il funtore identico $1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ che manda ogni oggetto ed ogni morfismo di $\mathbf{C}$ in se stessi.

(2) Se $\mathbf{K}$ è sottocategoria di $\mathbf{C}$, allora c'è un evidente funtore di inclusione $\mathbf{K} \to \mathbf{C}$.

(3) Se $\mathbf{C}$ denota una delle categorie dei primi quattro esempi di 1.1.2, esiste un funtore **dimenticante** $D : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$, cioè il funtore che dimentica la struttura e fornisce l'insieme e l'applicazione sostegno.

(4) Se S è un insieme, si può costruire il gruppo libero $< S >$ generato da S. Si ottiene un funtore $< - >: \mathbf{Set} \to \mathbf{Gr}$.

(5) Se $\mathcal{P}(X)$ denota l'insieme delle parti dell'insieme X, allora si ottiene un funtore

$$\mathcal{P}^* : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

ponendo $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ e, per una funzione $f : X \to Y$, $\mathcal{P}^*(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, ove $\mathcal{P}^*(f)(U) = f(U), \quad U \subset X$.

(6) Sia G un gruppo e sia $[G : G]$ il sottogruppo dei commutatori. Il gruppo quoziente $\alpha(G) = G/[G : G]$ si dice abelianizzazione di G. L'abelianizzazione è un funtore $\alpha : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$.

(7) Un esempio fondamentale di funtore è il seguente: sia $\mathbf{C}$ una categoria e sia $X \in \mathbf{C}$. L' Hom**-funtore covariante** rappresentato dall'oggetto X è il funtore

$$\mathrm{Hom}(X, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

definito da:

- $\mathrm{Hom}(X, -)(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$, per ogni $Y \in \mathbf{C}$,

- se $f : Y \to Z$ è un morfismo di $\mathbf{C}$, si pone

$$\mathrm{Hom}(X, f) = \mathrm{Hom}(X, -)(f) = \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Z)$$

l'applicazione $\mathrm{Hom}(X, f)(g : X \to Y) = f \circ g : X \to Z$.
Si usa scrivere, per semplicità , $\mathrm{Hom}(X, f) = f \circ (-) = f^*$.

Se $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ sono due funtori allora si può considerare la loro composizione, cioè il funtore

$$\mathsf{G} \circ \mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{E}, \quad X \mapsto \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)), \quad f \mapsto \mathsf{G}(\mathsf{F}(f).$$

Tale composizione è associativa e si ha sempre

$$1_{\mathbf{D}} \circ \mathsf{F} = \mathsf{F}, \quad \mathsf{F} \circ 1_{\mathbf{C}} = \mathsf{F} .$$

Un **funtore contravariante** $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un funtore covariante verso la categoria opposta $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}^{op}$.

(1) Un esempio è l'Hom**-funtore contravariante** rappresentato dall'oggetto X, cioè il funtore

$$\mathrm{Hom}(-, X) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

definito da:

- $\mathrm{Hom}(-, X)(Y) = \mathrm{Hom}(Y, X)$, per ogni $Y \in \mathbf{C}$,

- se $f : Y \to Z$ è un morfismo di $\mathbf{C}$, si pone

$$\mathrm{Hom}(f, X) = \mathrm{Hom}(-, X)(f) = \mathrm{Hom}(Z, X) \to \mathrm{Hom}(Y, X)$$

l'applicazione $\mathrm{Hom}(f, X)(g : Z \to X) = f \circ g : X \to Z$.
Si usa scrivere, per semplicità , $\mathrm{Hom}(f, X) = f \circ (-) = f_*$.

(2) Se $V \in \mathbf{Vect}_K$, lo spazio duale $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ definisce un **endofuntore**

$$(-)^* : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K, \quad V \mapsto V^*.$$

Un funtore $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ si dice **pieno**, risp. **fedele**, a seconda che le funzioni $\mathsf{F}_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(Y))$, siano suriettive, risp, iniettive. Un funtore che sia contemporaneamente pieno e fedele si dice **pienamente fedele**. Se $\mathbf{K}$ è sottocategoria di $\mathbf{C}$, il funtore di inclusione $\mathbf{K} \to \mathbf{C}$ è pienamente fedele se e solo se $\mathbf{K}$ è sottocategoria piena.
Una categoria **concreta** è una categoria munita di un funtore fedele verso la categoria degli insiemi.

Definizione 1.1.8. *Dati funtori* $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$*, una* **trasformazione naturale**

$$\tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$$

consiste di una classe di morfismsi $\{\tau_X : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{G}(X) \mid X \in \mathbf{C}\}$ *di* $\mathbf{D}$*, che è naturale nel senso che ogni morfismo* $f : X \to Y$ *in* $\mathbf{C}$ *induce un diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{F}(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\mathsf{F}(f)"'] & \mathsf{G}(X) \arrow[d, "\mathsf{G}(f)"] \\
\mathsf{F}(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & \mathsf{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

τ *sarà un* **isomorfismo naturale** *quando ogni* τ_X *è un isomorfismo in* $\mathbf{D}$.
La trasformazione naturale identica $id : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{F}$ *è data, ad ogni livello, da* $1_{\mathsf{F}(X)}$.

Le trasformazion naturali possono essere composte in due modi:

- se $\mathsf{F}, \mathsf{G}, \mathsf{H} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sono funtori (della stessa varianza) e $\tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$, $\sigma : \mathsf{G} \Rightarrow \mathsf{H}$ sono trasformazion naturali, allora $\sigma \circ \tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{H}$ è la trasformazione naturale che è definita, ad ogni livello $X \in \mathbf{A}$, da

$$(\sigma \circ \tau)_X = \sigma_X \circ \tau_X,$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, bend left=60, "\mathsf{F}"{name=F}] \arrow[r, "\mathsf{G}"{name=G}] \arrow[r, bend right=60, "\mathsf{H}"'{name=H}] & \mathbf{B}
\arrow[from=F, to=G, phantom, "\tau \Downarrow"]
\arrow[from=G, to=H, phantom, "\sigma \Downarrow"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, bend left=60, "\mathsf{F}"{name=F}] \arrow[r, bend right=60, "\mathsf{H}"'{name=H}] & \mathbf{B}
\arrow[from=F, to=H, phantom, "\Downarrow \sigma \circ \tau"]
\end{tikzcd}$$

• siano $\mathsf{F}, \mathsf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ and $\mathsf{H}, \mathsf{K} : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ due coppie di funtori e siuano $\tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G}$, $\sigma : \mathsf{H} \Rightarrow \mathsf{K}$ due trasformazion naturali. Si osservi che, per ogni $X \in \mathbf{A}$, c'è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathsf{H} \circ \mathsf{F})(X) \arrow[r, "\mathsf{H}(\tau_X)"] \arrow[d, "\sigma_{\mathsf{F}(X)}"'] & (\mathsf{H} \circ \mathsf{G})(X) \arrow[d, "\sigma_{G(X)}"] \\
(\mathsf{K} \circ \mathsf{F})(X) \arrow[r, "\mathsf{K}(\tau_X)"'] & (\mathsf{K} \circ \mathsf{G})(X)
\end{tikzcd}$$

e poniamo $\mu_X = \mathsf{K}(\tau_X) \circ \sigma_{\mathsf{F}(X)} = \sigma_{\mathsf{G}(X)} \circ \mathsf{H}(\tau_X)$. Allora $\mu = \{\mu_X : X \in \mathbf{C}\}$ risulta essere una trasformazione naturale $\mu : \mathsf{H} \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{K} \circ \mathsf{G}$. $\mu = \sigma * \tau$ si chiama lo **star product** di τ e σ.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, bend left, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & \mathbf{B} \arrow[r, bend left, "\mathsf{H}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{K}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \sigma"] & \mathbf{C} & = & \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "\mathsf{H} \circ \mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{K} \circ \mathsf{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \sigma * \tau"] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Entrambi i tipi di composizione di trasformazion naturali sono associative. Esiste una **interchange law** per tali composizioni che è espressa dalla formula

$$(\nu \circ \mu) * (\eta \circ \epsilon) = (\nu * \eta) \circ (\mu * \epsilon)$$

e rappresentata come segue

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left, "\mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{G}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta \circ \epsilon"] & \bullet \arrow[r, bend left, "\mathsf{H}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{K}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \nu \circ \mu"] & \bullet & = & \bullet \arrow[r, bend left, "\mathsf{H} \circ \mathsf{F}"] \arrow[r, bend right, "\mathsf{K} \circ \mathsf{G}"'] \arrow[r, phantom, "(\nu \circ \mu) * (\eta \circ \epsilon) \; \Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

$$(\nu * \eta) \circ (\mu * \epsilon) = (\nu \circ \mu) * (\eta \circ \epsilon).$$

Allora si possono considerare le composizioni $\tau\mathsf{H} : \mathsf{F} \circ \mathsf{H} \Rightarrow G \circ \mathsf{H} : \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ e $\mathsf{K}\tau : \mathsf{K} \circ \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{K} \circ \mathsf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$. Ad esempio, $(\tau\mathsf{H})_A = \tau_{\mathsf{H}(A)},\ A \in \mathbf{A}$.
Se $\tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un isomorfismo naturale e, per ogni $X \in \mathbf{C}$, $\sigma_X : \mathsf{G}(X) \to \mathsf{F}(X)$ è l'isomorfismo inverso di τ_X, allora si ottiene una trasformazione naturale $\sigma = (\sigma_X)_{X \in \mathbf{C}} : \mathsf{G} \Rightarrow \mathsf{F}$ tale che le composizioni $\sigma \circ \tau$ e $\tau \circ \sigma$ sono le trasformazioni identiche. σ è la **trasformazione naturale inversa** di τ. Essa è univocamente determinata e si denota τ^{-1}.

Da notare che le medesime definizioni e considerazioni si possono dare in generale per funtori della stessa varianza, ovvero, quanto visto sopra vale anche se i funtori coinvolti sono tutti contravarianti.

- Sia $f : X \to Y$ un morfismo della categoria $\mathbf{C}$. Allora f induce una trasformazione naturale tra gli Hom-funtori covarianti

  $$f^* : \mathrm{Hom}(Y, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}(X, -)$$

  definita come segue : per ogni $Z \in \mathbf{C}$, la funzione

  $$f^*_Z : \mathrm{Hom}(Y, Z) \Rightarrow \mathrm{Hom}(X, Z)$$

  manda un morfismo $u : Y \to Z$ nella composizione $u \circ f : X \to Z$. Si deve solo verificare che per ogni altro morfismo $t : Z \to W$ di $\mathbf{C}$ c'è un diagramma commutativo

  $$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(Y,Z) \arrow[r, "f^*_Z"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(Y,t)"'] & \mathrm{Hom}(X,Z) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,t)"] \\ \mathrm{Hom}(Y,W) \arrow[r, "f^*_W"'] & \mathrm{Hom}(X,W) \end{tikzcd}$$

- Sia $f : X \to Y$ un morfismo della categoria $\mathbf{C}$. Allora f induce una trasformazione naturale tra gli Hom-funtori contravarianti

  $$f_* : \mathrm{Hom}(-, X) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, Y)$$

definita come segue : per ogni $Z \in \mathbf{C}$, la funzione

$$f_{*Z} : \mathrm{Hom}(Z, X) \Rightarrow \mathrm{Hom}(Z, Y)$$

manda un morfismo $v : Z \to X$ nella composizione $f \circ v : Z \to Y$. Si deve solo verificare che per ogni altro morfismo $t : Z \to W$ di $\mathbf{C}$ c'è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(Z,X) \arrow[r, "f_{*Z}"] & \mathrm{Hom}(Z,Y) \\
\mathrm{Hom}(W,X) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(t,X)"] \arrow[r, "f_{*W}"'] & \mathrm{Hom}(W,Y) \arrow[u, "\mathrm{Hom}(t,Y)"']
\end{tikzcd}$$

Esempi 1.1.9.

(1) Sia $\mathcal{P}_* : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ il funtore che assegna ad ogni insieme X il suo insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ e che ad ogni funzione $f : X \to Y$ assegna la funzione

$$\mathcal{P}_*(f) : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad \mathcal{P}_*(f)(B) = f^{-1}(B), \quad \forall\ B \subset Y.$$

Denotiamo con $\mathbf{2}$ l'insieme $\{0, 1\}$.
Esiste un isomorfismo naturale $\tau : \mathcal{P}_* \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, \mathbf{2})$. Per ogni $X \in \mathbf{Set}$, basta definire

$$\tau_X : \mathcal{P}(X) \to \mathrm{Hom}(X, \mathbf{2})$$

in modo che $\tau_X(A)$ sia la funzione caratteristica del sottinsieme $A \subset X$.

(2) Per un fissato insieme S consideriamo i funtori

$$(-) \times S : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}, \quad X \mapsto X \times S, \quad f \mapsto f \times 1_S,$$

$$\mathrm{Hom}(S, -) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}.$$

Componendo si ottiene

$$((-) \times S) \circ \mathrm{Hom}(S, -) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}, \quad X \mapsto \mathrm{Hom}(S, X) \times S = X^S \times S.$$

Possiamo definire una trasformazione naturale

$$\tau : ((-) \times S) \circ \mathrm{Hom}(S, -) \Rightarrow 1_{\mathbf{Set}}$$

ponendo, per ogni insieme X, $\tau_X : X^S \times S \to X$ la funzione definita da $(f, s) \mapsto f(s)$ (**funzione di valutazione**).

(3) Sia $D : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante. Per ogni $G \in \mathbf{Gr}$ si ha che esiste una biiezione canonica $\gamma_G : D(G) \to \mathbf{Gr}(\mathbb{Z}, G)$ (un omomorfismo di gruppi $f : \mathbb{Z} \to G$ è completamente determinato da $f(1) \in G$). Si ottiene un isomorfismo naturale $\gamma : D \Rightarrow \mathbf{Gr}(\mathbb{Z}, -)$.

(4) Sia $D : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante. Anche in questo caso c'è una biiezione canonica $\tau_V : D(V) \to \mathbf{Vect}_K(K, V)$ (una funzione continua lineare $L : K \to V$ è completamente determinata da $L(1) \in V$). Si ottiene allora un isomorfismo naturale $\tau : D \Rightarrow \mathbf{Vect}_K(K, -)$.

(5) si consideri il funtore identico $1_{\mathbf{Set}} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. Per ogni $S \in \mathbf{Set}$ c'è una biiezione canonica $\sigma_S : S \to \mathrm{Hom}(*, S)$. Si ottiene un isomorfismo naturale $\sigma : 1_{\mathbf{Set}} \Rightarrow \mathrm{Hom}(*, -)$.

(6) Sia $\mathbf{Vect}_K^{fd}$ la sottocategoria piena di $\mathbf{Vect}_K$ costituita dagli spazi di dimensione finita con una base fissata. Consideriamo il funtore

$$\phi : \mathbf{Vect}_K^{fd} \to \mathbb{N}_K,\ \phi(V) = dim\ V,\ \phi(L : V \to W) = M(L).$$

(7) Sia $F : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Gr}$ il funtore del sottogruppo dei commutatori, cioè, per ogni $G \in \mathbf{Gr}$, $F(G) = [G : G]$, $F(f : G \to G') = [f : f]$. Otteniamo una trasformazione naturale $\sigma : F \Rightarrow 1_{\mathbf{Gr}}$ illustrata da

$$\begin{tikzcd}
[G : G] \arrow[r, "\sigma_G"] \arrow[d, "{[f : f]}"'] & G \arrow[d, "f"] \\
[G' : G'] \arrow[r, "\sigma_{G'}"'] & G'
\end{tikzcd}$$

ove i morfismi orizzontali sono gli omomorfismi di inclusione.

(8) Sia $\alpha : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$ il funtore di abelianizzazione e sia $I : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Gr}$ il funtore di immersione. Si ha una trasformazione naturale $\tau : 1_{\mathbf{Gr}} \Rightarrow I \circ F$ illustrata da

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\tau_G"] \arrow[d, "f"'] & G/[G:G] \arrow[d, "\alpha(f)"] \\ G' \arrow[r, "\tau_{G'}"'] & G'/[G':G'] \end{tikzcd}$$

ove i morfismi orizzontali sono le proiezioni sul quoziente.

(9) Siano $D : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante e $< - >: \mathbf{Set} \to \mathbf{Gr}$ il funtore di gruppo libero. Anche in questo caso il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\tau_S"] \arrow[d, "f"'] & D(< S >) \arrow[d, "D(< f >)"] \\ T \arrow[r, "\tau_T"'] & D(< T >) \end{tikzcd}$$

con i morfismi orizzontali le funzioni di inclusione, fornisce una trasformazione naturale $\tau : 1_{\mathbf{Set}} \Rightarrow D\circ < - >$.

(10) Con le stesse notazioni dell'esempio precedente si provi che esiste una trasformnazione naturale $\sigma : D\circ < - > \Rightarrow 1_{\mathbf{Gr}}$.

1.2 Funtori rappresentabili e Lemma di Yoneda.

Sia $\mathbf{C}$ una categoria assegnata e siano $X, Y \in \mathbf{C}$. Abbiamo visto che ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathbf{C}$ induce una trasformazione naturale

$$f^* : \mathrm{Hom}(Y, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}(X, -)$$

tra gli Hom-funtori (covarianti) rappresentati dai due oggetti. Si ha:

Proposizione 1.2.1. *f^* è un isomorfismo naturale se e solo se f è un isomorfismo di $\mathbf{C}$.*

Dim. è chiaro che se f è un isomorfismo allora la trasformazione naturale $f^{-1*} : \mathrm{Hom}(X, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}(Y, -)$ è l'inversa di f^*.
Viceversa, sia f^* un isomorfismo naturale. Per ogni $Z \in \mathbf{C}$ si ha una biiezione

$$f^*_Z : \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z),$$

in particolare è una biiezione la funzione $f^*_X : \mathrm{Hom}(Y, X) \to \mathrm{Hom}(X, X)$. Allora c'è un unico morfismo $g : Y \to X$ tale che $g \circ f = 1_X$. Consideriamo poi che

$$f^*_Y : \mathrm{Hom}C(Y, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y)$$

è una biiezione e che

$$f^*_Y(f \circ g) = (f \circ g) \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ 1_X = f = f^*_Y(1_Y).$$

Finalmente $f \circ g = 1_Y$. □

Definizione 1.2.2. *Un funtore $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ si dice* **rappresentabile** *se esiste un oggetto X di $\mathbf{C}$ ed un isomorfismo naturale $\tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathrm{Hom}(X, -)$. In tal caso diciamo che la coppia (X, τ) è una* **rappresentazione** *di F.*

Teorema 1.2.3. (Lemma di Yoneda). *Sia $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ un funtore (covariante) e sia $X \in \mathbf{C}$. Esiste una biiezione tra l'insieme $Nat(\mathrm{Hom}(X, -), \mathsf{F})$ delle trasformazioni naturali $\mathrm{Hom}(X, -) \Rightarrow \mathsf{F}$ e l'insieme $\mathsf{F}(X)$:*

$$y : Nat(\mathrm{Hom}(X, -), \mathsf{F}) \to \mathsf{F}(X) \ .$$

Dim. Se $\tau : \mathrm{Hom}(X, -) \Rightarrow \mathsf{F}$, poniamo $x = \tau_X(1_X)$ e definiamo $y(\tau) = x$. Notiamo che dal diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,f)"'] & \mathsf{F}(X) \arrow[d, "\mathsf{F}(f)"] \\
\mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & \mathsf{F}(Y)
\end{tikzcd}$$

si ottiene che, per ogni $f : X \to Y$ in $\mathbf{C}$, risulta $\tau_Y(f) = \mathsf{F}(f)(x)$.
Se ora $x \in \mathsf{F}(X)$ è un qualunque elemento fissato, costruiamo la funzione

$$\sigma_Y : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathsf{F}(Y), \quad \sigma_Y(f) = \mathsf{F}(f)(x).$$

$(\sigma_Y)_{Y \in \mathbf{C}}$ è una trasformazione naturale $\mathrm{Hom}(X, -) \Rightarrow F$, infatti per $h : Y \to Z$ in $\mathbf{C}$ si ha

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(X,Y) \arrow[r, "\sigma_Y"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,h)"'] & \mathsf{F}(Y) \arrow[d, "\mathsf{F}(h)"] \\
\mathrm{Hom}(X,Z) \arrow[r, "\sigma_Z"'] & \mathsf{F}(Z)
\end{tikzcd}$$

è commutativo poichè

$$(\mathsf{F}(h) \circ \sigma_Y)(f) = (\mathsf{F}(h) \circ \mathsf{F}(f))(x)$$

mentre

$$(\sigma_Z(f) \circ \mathrm{Hom}(X, h))(x) = \mathsf{F}(h \circ f)(x).$$

E questa è l'unica trasformazione naturale tale che $x = \sigma_X(1_X)$. $\square$

Come corollario del Lemma di Yoneda si ottiene subito la seguente affermazione

- *Se X, Y sono due oggetti della categoria $\mathbf{C}$, allora c'è una biiezione*

  $$y : Nat(\mathrm{Hom}(X, -), \mathrm{Hom}(Y, -)) \to \mathrm{Hom}(Y, X)\ .$$

  In particolare $Nat(\mathrm{Hom}(X, -), \mathrm{Hom}(Y, -))$ è un insieme.

- *Se* (X, τ) *ed* (Y, σ) *sono due rappresentazioni per* F*, allora esiste un unico isomorfismo* $f : X \to Y$ *tale che*

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}(Y,-) \arrow[dd, Rightarrow, "f^*"] \\
\mathsf{F} \arrow[ur, Rightarrow, "\sigma"] \arrow[dr, Rightarrow, "\tau"'] & \\
& \mathrm{Hom}(X,-)
\end{tikzcd}
\qquad f^* \circ \sigma = \tau \ .
$$

Ad esempio, la composizione $\sigma \circ \tau^{-1} : \mathrm{Hom}(X,-) \Rightarrow \mathrm{Hom}(Y,-)$ *è un isomorfismo naturale, pertanto è indotto da un isomorfismo* $f : X \to Y$*.*

1.2.1 L'immersione di Yoneda.

Se $\mathbf{C}$ è una categoria arbitraria è possibile costruire la (meta-)categoria $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ i cui oggetti sono i funtori covarianti $\mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ ed i cui morfismi sono le loro trasformazioni naturali, cioè $\mathrm{Hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{Set}]}(F, G) = Nat(F, G)$.
Il funtore contravariante

$$\mathcal{Y} : \mathbf{C} \to [\mathbf{C}, \mathbf{Set}],$$

definito da $\mathcal{Y}(X) = \mathrm{Hom}(X,-)$ e $\mathcal{Y}(f) = f^*$ è iniettivo sugli oggetti e pienamente fedele, per quanto sopra. Esso prende il nome di **immersione di Yoneda (contravariante)**.

* * *

In generale $Nat(F, G)$ non è un insieme ma una classe propria, pertanto $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ non è una categoria secondo la definizione che abbiamo dato. Per ovviare inconvenienti logici di tale tipo è stato accettato un ulteriore assioma per la Teoria degli Insiemi. Si tratta del cosiddetto **Assioma dell'Universo**. Senza entrare in dettaglio diciamo che se $\mathbf{A}$ è una classe propria in un dato universo $\mathcal{U}$ allora esiste un universo superiore $\mathcal{U}'$, contenente cioè $\mathcal{U}$, in cui $\mathbf{A}$ è un insieme. Questo è il significato della parola "meta-categoria". Per considerare $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ una categoria secondo la definizione, è necessario accedere ad un universo superiore.

Tutta la teoria che abbiamo svolto per gli Hom-funtori covarianti si può ripetere in maniera analoga per Hom-funtori contravarianti:

Siano $X, Y \in \mathbf{C}$. Ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathbf{C}$ induce una trasformazione naturale

$$f_* : \mathrm{Hom}(-, X) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, Y)$$

tra gli Hom-funtori (contravarianti) rappresentati dai due oggetti. Si ha:

- *f_* è un isomorfismo naturale se e solo se f è un isomorfismo di $\mathbf{C}$.*

Definizione 1.2.4. *Un funtore contravariante $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ si dice* **rappresentabile** *se esiste un oggetto X di $\mathbf{C}$ ed un isomorfismo naturale $\tau : \mathsf{F} \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, X)$. In tal caso diciamo che la coppia (X, τ) è una* **rappresentazione di F.**

- Se (X, τ) ed (Y, σ) sono due rappresentazioni per F, allora esiste un unico isomorfismo $f : X \to Y$ tale che

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}(-, X) \arrow[dd, Rightarrow, "f_*"] \\
\mathsf{F} \arrow[ur, Rightarrow, "\tau"] \arrow[dr, Rightarrow, "\sigma"'] & \\
 & \mathrm{Hom}(-, Y)
\end{tikzcd} \qquad f_* \circ \tau = \sigma \ .$$

Questo fatto è corollario immediato del seguente

Teorema 1.2.5. *Lemma di Yoneda (Covariante). Sia $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ un funtore contravariante e sia $X \in \mathbf{C}$. Esiste una biiezione tra l'insieme $Nat(\mathrm{Hom}(-, X), \mathsf{F})$ delle trasformazioni naturali $\mathrm{Hom}(-, X) \Rightarrow \mathsf{F}$ e l'insieme $\mathsf{F}(X)$:*

$$y : Nat(\mathrm{Hom}(-, X), \mathsf{F}) \to \mathsf{F}(X) \ .$$

Si ottiene subito anche la seguente affermazione :

- Se X, Y sono due oggetti della categoria $\mathbf{C}$, allora c'è una biiezione

$$y : Nat(\mathrm{Hom}(-, X), \mathrm{Hom}(-, Y)) \to \mathrm{Hom}(X, Y) \ .$$

In particolare $Nat(\mathrm{Hom}(-, X), \mathrm{Hom}(-, Y))$ è un insieme.

Se $\mathbf{C}$ è una categoria arbitraria è possibile costruire la (meta-)categoria $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]'$ i cui oggetti sono i funtori contravarianti $\mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ ed i cui morfismi sono le loro trasformazioni naturali, cioè $\mathrm{Hom}_{[\mathbf{C},\mathbf{Set}]'}(F, G) = Nat(F, G)$.
Il funtore covariante

$$\mathcal{Y}' : \mathbf{C} \to [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]',$$

definito da $\mathcal{Y}'(X) = \mathrm{Hom}(-, X)$ e $\mathcal{Y}'(f) = f_*$ è iniettivo sugli oggetti e pienamente fedele, per quanto sopra. Esso prende il nome di **immersione di Yoneda (covariante)**.

1.2.2 Equivalenze di Categorie.

Proposizione 1.2.6. *Sia* $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$. *Allora* F *conserva gli isomorfismi. Se* F *è pienamente fedele, allora riflette gli isomorfismi.*

Dim. Se $f : X \to Y$ è un isomorfismo in $\mathbf{C}$ con inverso $f^{-1} : Y \to X$, allora da $f \circ f^{-1} = 1_X$ ed $f^{-1} \circ f = 1_Y$ segue che $\mathsf{F}(f)$ è un isomorfismo in $\mathbf{D}$ con $\mathsf{F}(f)^{-1} = \mathsf{F}(f^{-1})$.
Sia poi $g : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(Y)$ un isomorfismo in $\mathbf{D}$ con inverso $g^{-1} : \mathsf{F}(Y) \to \mathsf{F}(X)$. Poichè F è pieno, allora $g = \mathsf{F}(f)$ e $g^{-1} = \mathsf{F}(f')$. Da $g^{-1} \circ g = 1_{\mathsf{F}(X)}$ e $g \circ g^{-1} = 1_{\mathsf{F}(Y)}$, essendo F fedele segue $f' \circ f = 1_X$ e $f \circ f' = 1_Y$. Quindi $f' = f^{-1}$. □

Un funtore $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un isomorfismo di categorie se esiste un altro funtore $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tale che $\mathsf{G} \circ \mathsf{F} = 1_{\mathbf{C}}$ et $\mathsf{F} \circ \mathsf{G} = 1_{\mathbf{D}}$. In generale il concetto di isomorfismo di categorie è ritenuto molto rigido e poco frequente, pertanto si preferisce usare una nozione pi? debole e certamente pi? interessante, quella di **equivalenza di categorie**.

Definizione 1.2.7. *Un funtore* $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *è una equivalenza di categorie se esiste un altro funtore* $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *con isomorfismi naturali*

$$\eta : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}, \quad \nu : 1_{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathsf{F} \circ \mathsf{G}.$$

Teorema 1.2.8. $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *è una equivalenza di categorie se e solo se :*

- F *è pienamente fedele,*

- F *è* **denso** *(o, essenzialmente suriettivo), cioè, per ogni* $Y \in \mathbf{D}$, *esiste un* $X \in \mathbf{C}$ *con* $Y \cong \mathsf{F}(X)$.

Dim. Supponiamo F pienamente fedele e denso. Per ogni $Y \in \mathbf{D}$ scegliamo un unico $\mathsf{G}(Y) \in \mathbf{C}$ ed un unico isomorfismo $\nu_Y : Y \to \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y))$.
Se $g : Y \to Y'$ è un qualunque morfismo in $\mathbf{D}$, consideriamo il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\nu_Y"] \arrow[d, "g"'] & \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)) \arrow[d, "\nu_{Y'} \circ g \circ \nu_Y^{-1}"] \\ Y' \arrow[r, "\nu_{Y'}"'] & \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y')) \end{tikzcd}$$

Essendo F pienamente fedele, esiste un unico $f : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(Y')$ tale che $\mathsf{F}(f) = \nu_{Y'} \circ g \circ \nu_Y^{-1}$. Ponendo $\mathsf{G}(g) = f$ si ottiene un funzione ben definita

$$\mathsf{G} : Mor(\mathbf{D}) \to Mor(\mathbf{C}).$$

Proviamo che G è un funtore $\mathbf{D} \to \mathbf{C}$.
Per ogni $Y \in \mathbf{D}$ si consideri $1_Y : Y \to Y$. Allora esiste un unica $f : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(Y)$ tale che $\mathsf{F}(f) = \nu_{Y'} \circ 1_D \circ \nu_Y^{-1} = 1_{\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y))}$, pertanto deve essere $f = 1_{\mathsf{G}(Y)}$.
Siano ora

$$Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{h} Y''$$

e consideriamo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\nu_Y"] \arrow[d, "g"'] & \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)) \arrow[d, "\nu_{Y'} \circ g \circ \nu_Y^{-1}"] \\ Y' \arrow[r, "\nu_{Y'}"'] \arrow[d, "h"'] & \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y')) \arrow[d, "\nu_{Y''} \circ h \circ \nu_{Y'}^{-1}"] \\ Y'' \arrow[r, "\nu_{Y''}"'] & \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y'')) \end{tikzcd}$$

Poichè

$$(\nu_{Y''} \circ h \circ \nu_{Y'}^{-1}) \circ (\nu_{Y'} \circ g \circ \nu_Y^{-1}) = \nu_{Y''} \circ h \circ g \circ \nu_Y^{-1}$$

segue che $\mathsf{G}(g \circ f) = \mathsf{G}(g) \circ \mathsf{G}(f)$.
Si verifica poi facilmente che $(\nu_Y)_{Y \,\in\, \mathbf{D}} : 1_{\mathbf{D}} \Rightarrow \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$ è un isomorfismo naturale.
D'altra parte, per ogni $X \in \mathbf{C}$ si ha un isomorfismo

$$\nu_{\mathsf{F}(X)} : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(\mathsf{G}(\mathsf{F}(X))),$$

allora c'è un unico isomorfismo

$$\eta_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X))$$

tale che $\mathsf{F}(\eta_X) = \nu_{F(X)}$. Anche ora è facile verificare che

$$(\eta_X)_{X \,\in\, \mathbf{C}} : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}$$

è un isomorfismo naturale.
Viceversa, assumiamo che F sia una equivalenza. Allora

- F è fedele. Supponiamo che $f, g \in \mathrm{Hom}(X, X')$ siano tali che $\mathsf{F}(f) = \mathsf{F}(g)$. Si ha

  $$f \circ \nu_X = \nu_{X'} \circ \mathsf{F}(f) = \nu_{X'} \circ \mathsf{F}(g) = g \circ \nu_X,$$

  quindi $f = g$.
  Notiamo che, con metodo analogo, si prova che anche G è fedele.

- F è pieno. Se $h \in \mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(X'))$, il morfismo

  $$f = \eta_{X'}^{-1} \circ \mathsf{G}(h) \circ \eta_X : X \to X'$$

  rende commutativi entrambi i diagrammi

  $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(h)"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(f))"] \\ Y \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \end{tikzcd}$$

  quindi, da $\mathsf{G}(h) \circ \eta_X = \mathsf{G}(\mathsf{F}(f)) \circ \eta_X$, essendo η_X un isomorfismo, segue $\mathsf{G}(h) = \mathsf{G}(\mathsf{F}(f))$. Poichè G è fedele si ottiene $h = \mathsf{F}(f)$ e, insieme al fatto che $\nu_D : \mathsf{F}(\mathsf{G}(D)) \to D$ è un isomorfismo, per ogni $D \in \mathbf{D}$, si completa la dimostrazione.

□

1.2.3 Gruppoidi.

Un **gruppoide** è una categoria piccola i cui morfismi sono tutti invertibili, cioè isomorfismi.
Il concetto di gruppoide generalizza quello di gruppo, infatti un gruppo è un gruppoide con un solo oggetto: sia G il gruppo, il gruppoide che si ottiene è quello i cui morfismi sono gli elementi di G, la composizione è la moltiplicazione di G.
Se G è un gruppoide e $x \in G$, denotiamo con

$$[x] = \{y \in G \mid \mathrm{Hom}_G(x, y) \neq \emptyset\}$$

la **componente** di x. Le componenti costituiscono una partizione dell'insieme G.
Per ogni $x \in G$, l'insieme $\mathrm{Hom}_G(x, x)$ è un gruppo rispetto alla composizione di morfismi, detto gruppo di Poincarre.

Proposizione 1.2.9. *Se $x, y \in G$ e $[x] = [y]$, allora i due gruppi $\mathrm{Hom}_G(x, x)$ e $\mathrm{Hom}_G(y, y)$ sono isomorfi.*

Dim. Esiste un morfismo $\alpha : x \to y$ in G, allora l'isomorfismo è dato da

$$\alpha^* : \mathrm{Hom}_G(x, x) \to \mathrm{Hom}_G(y, y),\ u \mapsto u \circ \alpha \circ u^{-1}$$

□

Denoteremo con **Gpd** la categoria con oggetti i gruppoidi e morfismi i loro funtori. Gli isomorfismi di **Gpd** sono gli isomorfismi naturali.

Esempi 1.2.10.

(1) La categoria $\mathbf{Vect}_K^{fd}$ degli spazi vettoriali de dimensione finita sul campo K, con base fissata, è equivalente alla categoria delle matrici $\mathbb{N}_K$. Il funtore $dim : \mathbf{Vect_K} \to \mathbb{N}_K$ che associa ad ogni spazio vettoriale la sua dimensione e ad ogni funzione lineare $L : (V, \mathcal{B}) \to (W, \mathcal{B}')$ la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(L)$ è una equivalenza.

(2) Il funtore di spazio duale $D : \mathbf{Vect_K} \to \mathbf{Vect_K}$, $D(V) = V^*$ è una equi-valenza, non un isomorfismo, infatti $V \cong V^{**}$ ma $V \neq V^{**}$.

(3) Sia $(S, \leq)$ un preordine, considerato come categoria piccola. Definiamo la relazione
$$x \sim y \Leftrightarrow [x \leq y \quad \text{e} \quad y \leq x].$$
Posto $\tilde{S} = S/\sim$ e $[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \leq y$, si ha che $(\tilde{S}, \leq)$ e un insieme parzialmente ordinato. La funzione quoziente $P_S : S \to \tilde{S}$ è un funtore, essendo monotona, e realizza una equivalenza. Allora ogni preordine è equivalente (come categoria) ad un insieme ordinato.

(4) Se $\mathbf{C}$ è una qualunque categoria, il suo scheletro $Sk(\mathbf{C})$ è la sottocategoria piena che si ottiene da $\mathbf{C}$ prendendo come oggetti un rappresentante per ciascuna classe di isomorfismo. Provare che ogni categoria è equivalente al suo scheletro e che due categorie sono equivalenti se e solo se i loro scheletri sono isomorfi.

(5) In generale non è vero che una categoria $\mathbf{C}$ sia equivalente alla sua duale. In fatti, nel caso della categoria degli insiemi si ha $\mathbf{Set}(*, S) \neq \mathbf{Set}(S, *)$, per ogni insieme $S \in \mathbf{Set}$ con pi? di un elemento, essendo $*$ l'insieme puntiforme.

1.3 Funtori Aggiunti.

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come la nozione di equivalenza tra categorie sia pi? debole di quella di isomorfismo. Introdurremo ora un concetto a sua volta pi? debole di quello di equivalenza: l'aggiunzione tra funtori. S. MacLane lo presenta con queste parole : "*Adjoint functors arise everywhere.*"

Definizione 1.3.1. *Sia* $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore e sia* $X \in \mathbf{C}$. *Un* **morfismo** G**-universale** *per* X *è un morfismo* $u : X \to \mathsf{G}(Y)$, $Y \in \mathbf{D}$, *con la seguente proprietà:*

- *per ogni altro morfismo* $f : X \to \mathsf{G}(Y')$ *esiste un unico morfismo* $\tilde{f} : Y \to Y'$ *in* $\mathbf{D}$ *che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathsf{G}(Y) \arrow[d, "\mathsf{G}(\tilde{f})"] \\ & \mathsf{G}(Y') \end{tikzcd}$$

cioè $\mathsf{G}(\tilde{f}) \circ u = f$.
Se $u : X \to \mathsf{G}(Y)$ *e* $u' : X \to \mathsf{G}(Y')$ *sono due morfismi* G*-universali per* X, *allora esiste un unico isomorfismo* $v : Y \to \mathsf{Y}'$ *tale che* $\mathsf{G}(v) \circ u = u'$.
Dato $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, *la nozione di morfismo* **morfismo** F**-couniversale** $v : \mathsf{F}(X) \to Y$ *per* $Y \in \mathbf{D}$ *si definisce dualmente.*

Definizione 1.3.2. *Siano* $\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *due categorie. Una* **aggiunzione** *da* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$ *è una terna* $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$, *ove*

$$\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \quad e \quad \mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

sono due funtori (stessa varianza) e $\Phi = \{\Phi_{X,Y} \mid X \in \mathbf{C}, Y \in \mathbf{D}\}$ *è una famiglia di biiezioni*

$$\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \mathsf{G}(Y)),$$

naturale in X *ed in* Y.

La **naturalità** di Φ significa che, per ogni $f : X \to X'$ in $\mathbf{C}$ e per ogni $g : Y \to Y'$ in $\mathbf{D}$, sono commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"] \arrow[d, "g \circ (-)"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(Y)) \arrow[d, "\mathsf{G}(g) \circ (-)"] \\
\mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), Y') \arrow[r, "\Phi_{X,Y'}"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(Y'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X'), Y) \arrow[r, "\Phi_{X',Y}"] \arrow[d, "(-) \circ F(f)"'] & \mathrm{Hom}(X', \mathsf{G}(Y)) \arrow[d, "(-) \circ f"] \\
\mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(Y))
\end{tikzcd}$$

Se $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ è una aggiunzione, si dice che F **aggiunto a sinistra** di G e che G è **aggiunto a destra** di F.

Proposizione 1.3.3. *Sia* $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ *una aggiunzione da* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$. *Allora:*

(1) *Per ogni* $f : \mathsf{F}(X) \to Y$ *si ha* $\Phi_{X,Y}(f) = \mathsf{G}(f) \circ \eta_X$*, essendo*

$$\eta_X = \Phi_{X,Y}(1_{\mathsf{F}(X)}).$$

(2) $\eta_X : X \to \mathsf{GF}(X)$ *è un morfismo* G*-universale per* X.

(3) $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathbf{C}} : 1_{\mathbf{C}} \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}$ *è una trasformazione naturale, detta* **unità di aggiunzione**.

(4) η *definisce l'aggiunzione.*

Dim. (1) Segue immediatamente dall commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(X)) \arrow[r, "\Phi_{X,\mathsf{F}(X)}"] \arrow[d, "f \circ (-)"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(\mathsf{F}(X))) \arrow[d, "\mathsf{G}(f) \circ (-)"] \\
\mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), Y) \arrow[r, "\Phi_{X,Y}"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(Y))
\end{tikzcd}$$

(2) Segue dal fatto che $\Phi_{X,\,Y}$ è una biiezione e da (1).
(3) Si deve provare che per ogni morfismo $f : X \to X'$ in $\mathbf{C}$ c'è un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(f))"] \\ X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \end{tikzcd} ,$$

cioè $\mathsf{G}(\mathsf{F}(f)) \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ f$. Quest'ultima uguaglianza equivale alla commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X'), \mathsf{F}(X')) \arrow[r, "\Phi_{X', \mathsf{F}(X')}"] \arrow[d, "\mathsf{F}(f) \circ (-)"'] & \mathrm{Hom}(X', \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))) \arrow[d, "f \circ (-)"] \\ \mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), \mathsf{F}(X')) \arrow[r, "\Phi_{X, \mathsf{F}(X')}"'] & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))) \end{tikzcd} ,$$

tenendo presente la (1).
(4) $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathbf{C}}$ è una trasformazione naturale in cui ogni η_X è un morfismo G-universale. Per ogni $X \in \mathbf{C}$ e per ogni $Y \in \mathbf{D}$ sia

$$\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(X), Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \mathsf{G}(Y)),$$

definita da $\Phi_{X,Y}(f) = \mathsf{G}(f) \circ \eta_X$. Allora $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ è un'aggiunzione con unit? di aggiunzione η. □

In maniera analoga si ottiene anche

Proposizione 1.3.4. *Sia* $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$ *una aggiunzione da* $\mathbf{C}$ *a* $\mathbf{D}$. *Allora:*

(1) *Per ogni* $g : X \to \mathsf{G}(Y)$ *si ha* $\Phi^{-1}_{X,Y}(g) = \epsilon_Y \circ \mathsf{G}(g)$, *essendo*

$$\epsilon_Y = \Phi^{-1}_{\mathsf{G}(Y),\, Y}(1_{\mathsf{G}(Y)}).$$

(2) $\epsilon_Y : \mathsf{FG}(Y) \to Y$ *è un morfismo* F-*couniversale per* Y.

(3) $\epsilon = (\epsilon_Y)_{Y \in \mathbf{D}} : \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ *è una trasformazione naturale, detta* **counità di aggiunzione**.

(4) ϵ *definisce l'aggiunzione.*

Proposizione 1.3.5. *Gli aggiunti sono univocamente determinati a meno di equivalenze naturali.*

Dim. Siuano $\mathsf{F}, \mathsf{F}' : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ due aggiunti a sinistra di $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ con unità di aggiunzione $\eta_X : X \to \mathsf{GF}(X)$, $\eta'_X : X \to \mathsf{GF}'(X)$, rispettivamente. Poichè η_X, η'_X sono morfismi G-universali per X, esiste un unico isomorfismo $\alpha_X : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}'(X)$ tale che $\mathsf{G}(\alpha_X) \circ \eta_X = \eta'_X$. Proviamo che $\alpha = (\alpha_X)_{X \in \mathbf{C}}$ è un isomorfismo naturale $\mathsf{F} \Rightarrow \mathsf{F}'$. Sia $f : X \to X'$ un morfismo in $\mathbf{C}$ e si consideri il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
& & \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X)) \arrow[ddd, "\mathsf{G}(\mathsf{F}'(f))"] \\
X \arrow[urr, "\eta'_X"] \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[ur, "\mathsf{G}(\alpha_X)"'] \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(f))"] & \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] \arrow[drr, "\eta'_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X')) \arrow[dr, "\mathsf{G}(\alpha_{X'})"] & \\
& & \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X'))
\end{tikzcd} .$$

dal quale si ricava:

$$\mathsf{G}(\mathsf{F}'(f)) \circ \mathsf{G}(\alpha_X) \circ \eta_X = \mathsf{G}(\mathsf{F}'(f)) \circ \eta'_X = \eta'_{X'} \circ f = \mathsf{G}(\alpha_{X'}) \circ \eta'_{X'} \circ f =$$

$$= \mathsf{G}(\alpha_{X'}) \circ \mathsf{G}(\mathsf{F}(f)) \circ \eta_X,$$

quindi

$$\mathsf{G}(\mathsf{F}'(f) \circ \alpha_X) \circ \eta_X = \mathsf{G}(\alpha_{X'} \circ \mathsf{F}(f) \circ \eta_X$$

che, per l'universalità, implica

$$\mathsf{F}'(f) \circ \alpha_X = \alpha_{X'} \circ \mathsf{F}(f).$$

$\square$

Proposizione 1.3.6. *Sia* $\mathsf{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *un funtore. Se per ogni* $X \in \mathbf{C}$ *è data un morfismo* G*-universale* $\eta_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X))$*, allora esiste un unico funtore* $\mathsf{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *aggiunto a sinistra di* G*.*

Dim. Si noti che se $\eta_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X))$ e $\eta'_X : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X))$ sono due morfismi G-xuniversali per X, allora esiste un unico isomorfismo $\alpha_X : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}'(X)$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(\alpha_X)"] \\
X \arrow[ur, "\eta_X"] \arrow[dr, "\eta_{X'}"'] & \\
 & \mathsf{G}(\mathsf{F}'(X))
\end{tikzcd}$$

L'ipotesi fornisce allora una corrispondenza $\mathsf{F} : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$. Se poi è dato un morfismo $f : X \to X'$ in $\mathbf{C}$, allora in corrispondenza di $\eta_{X'} \circ f : X \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))$ esiste un unico morfismo $a_f : \mathsf{F}(X) \to \mathsf{F}(X')$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X)) \arrow[d, "\mathsf{G}(a_f)"] \\
X' \arrow[r, "\eta_{X'}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(X'))
\end{tikzcd} .$$

Definiamo $\mathsf{F}(f) = a_f$. Ci si rende conto facilmente che si ottiene un unico funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e di conseguenza una trasformazione naturale

$$\eta = (\eta_X)_{X \in \mathbf{C}} : 1_X \Rightarrow \mathsf{G} \circ \mathsf{F}.$$

Per ogni $Y \in \mathbf{D}$, consideriamo ora il morfismo universale

$$\eta_{G(Y)} : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)).$$

In corrispondenza del morfismo identico $1_{\mathsf{G}(Y)} : \mathsf{G}(Y) \to \mathsf{G}(Y)$ esiste allora un unico morfismo $\epsilon_Y : \mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)) \to Y$ che commuta il triangolo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{G}(Y) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{G}(Y)}"] \arrow[dr, "1_{\mathsf{G}(Y)}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(G(Y))) \arrow[d, "\mathsf{G}(\epsilon_Y)"] \\
 & \mathsf{G}(Y)
\end{tikzcd}$$

Proviamo che $\epsilon = (\epsilon_Y)_{Y \in \mathbf{D}} : \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$ è una trasformazione naturale, cioè per ogni $f : Y \to Y'$ è commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y)) \arrow[r, "\epsilon_Y"] \arrow[d, "\mathsf{F}(\mathsf{G}(f))"'] & Y \arrow[d, "f"] \\
\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y')) \arrow[r, "\epsilon_{Y'}"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{G}(Y) \arrow[r, "\eta_{\mathsf{G}(Y)}"] \arrow[d, "\mathsf{G}(f)"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y))) \arrow[d, "\mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(f)))"] \\
\mathsf{G}(Y') \arrow[r, "\eta_{\mathsf{G}(Y')}"'] & \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(Y')))
\end{tikzcd}$$

Si ha :

$$\mathsf{G}(f) \circ \mathsf{G}(\epsilon_Y) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y)} = \mathsf{G}(f) \circ 1_{\mathsf{G}(Y)} = \mathsf{G}(f)$$

et

$$\mathsf{G}(f) = 1_{\mathsf{G}(Y')} \circ \mathsf{G}(f) = \mathsf{G}(\epsilon_{Y'}) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')} \circ \mathsf{G}(f) =$$

$$= \mathsf{G}(\epsilon_{Y'}) \circ \mathsf{G}(\mathsf{F}(\mathsf{G}(f))) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')},$$

da cui

$$\mathsf{G}(f \circ \epsilon_Y) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')} = \mathsf{G}(\epsilon_{Y'} \circ \mathsf{F}(\mathsf{G}(f))) \circ \eta_{\mathsf{G}(Y')}.$$

Poichè $\eta_{\mathsf{G}(Y)}$ è un morfismo universale segue infine

$$f \circ \epsilon_Y = \epsilon_{Y'} \circ \mathsf{F}(\mathsf{G}(f)),$$

ovvero la commutatività del primo diagramma. è chiaro a questo punto che definendo una funzione

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(\mathsf{F}(X), Y) \to \mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(Y)),$$

$$\phi_{X,Y}(h) = \mathsf{G}(h) \circ \eta_X,$$

si ottiene una biiezione con inversa data da $\phi^{-1}_{X,Y}(g) = \epsilon_Y \circ \mathsf{F}(g)$. Rimane solo da verificare la naturalità di $\phi_{X,Y}$ per $X \in \mathbf{C}, Y \in \mathbf{D}$, per ottenere l'aggiunzione. $\square$

Nota 1.3.7.

- Una aggiunzione $\mathsf{F} \dashv \mathsf{G}$ si può equivalentemente descrivere assegnando le biiezioni di aggiunzione oppure le unità e counità di aggiunzione.

- Una aggiunzione è una equivalenza se e solo se le unità e counità di aggiunzione sono isomorfismi naturali.

Proposizione 1.3.8. *Si consideri il diagramma di funtori*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C} \arrow[r, shift left, "\mathsf{F}"] & \mathbf{D} \arrow[l, shift left, "\mathsf{U}"] \arrow[r, shift left, "\mathsf{G}"] & \mathbf{E} \arrow[l, shift left, "\mathsf{V}"] \end{tikzcd}$$

ove $\mathsf{U} \dashv \mathsf{F}$ *e* $\mathsf{V} \dashv \mathsf{G}$. *Allora* $\mathsf{U} \circ \mathsf{V} \dashv \mathsf{F} \circ \mathsf{G}$, *cioè la composizione di aggiunti è ancora un aggiunto.*

Dim. Per ogni $X \in \mathbf{C}$ e per ogni $Z \in \mathbf{E}$ si ha la composizione di biiezioni naturali

$$\mathrm{Hom}(\mathsf{UV}Z, X) \xrightarrow{\Phi_{X,\mathsf{V}Z}} \mathrm{Hom}(\mathsf{V}Z, \mathsf{F}X) \xrightarrow{\Psi_{\mathsf{F}X,Z}} \mathrm{Hom}(Z, \mathsf{GF}X),$$

essendo $\{\Phi_{X,\mathsf{V}Z}\}$ e $\{\Psi_{\mathsf{F}X,Z}\}$ le biiezioni delle due aggiunzioni date. □

Esempi 1.3.9.

(1) Sia X un insieme fissato e consideriamo il funtore

$$X \times (-) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set},$$

$$Y \mapsto X \times Y, \quad (f : Y \to Z) \mapsto 1_X \times f : X \times Y \to X \times Z,$$

e l'Hom-funtore $\mathrm{Hom}(X, -) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.
Per ogni coppia di insiemi $Y, Z \in \mathbf{Set}$ si ha la biiezione

$$\phi_{Y,Z} : \mathrm{Hom}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Hom}(Y, \mathrm{Hom}(X, Z)), \quad h \mapsto \tilde{h}$$

essendo, per $h : X \times Y \to Z$ la funzione $\tilde{h} : Y \to \mathrm{Hom}(X, Z)$ definita come segue:

$$\forall\, y \in Y, \quad \tilde{h}(y) : X \to Z, \quad \tilde{h}(y)(x) = h(x, y), \quad \forall x \in X.$$

La famiglia $\{\phi_{Y,Z} \mid Y, Z \in \mathbf{Set}\}$ è naturale in entrambe le variabili e definisce una aggiunzione $X \times (-) \dashv \mathrm{Hom}(X, -)$.

∗∗∗ Una categoria $\mathbf{C}$ dotata di prodotti binari si dice **cartesiana chiusa** se per ogni oggetto $X \in \mathbf{C}$ il funtore $X \times (-) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ammette un aggiunto a sinistra. Allora **Set** è l'esempio base di categoria cartesiana chiusa. Un altro esempio fondamentale verrà trattato in (2.9). Si veda anche (1.1.7).

(2) Siano $G, H \in \mathbf{Gr}$ due gruppi. $G \times H$ è l'usuale gruppo prodotto e $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, H)$ è anche un gruppo con l'operazione $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, $\forall f, g : G \to H$ omomorfismi e $\forall x \in G$. Si può ripetere la costruzione data in (1)?

(3) Siano A, B due insiemi ed $\mathcal{R} \subset A \times B$ una relazione tra di essi. Consideriamo gli insiemi ordinati $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ come categorie piccole ed i funtori contravarianti:

$$r : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), \quad r(S) = \{b \in B \mid (s, b) \in \mathcal{R}, \forall s \in S\},$$

$$l : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), \quad l(T) = \{a \in A \mid (a, t) \in \mathcal{R}, \forall t \in T\}.$$

Allora $l \dashv r$, infatti si ha

$$l(T) \subset S \Leftrightarrow T \subset r(S), \quad \forall S \in \mathcal{P}(A),\ \forall T \in \mathcal{P}(B).$$

(4) Siano $D : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimenticante e $< - >: \mathbf{Set} \to \mathbf{Gr}$ il funtore di gruppo libero. Per ogni insieme S e detta $\sigma_S : S \to < S >$ l'inclusione dell'insieme dei generatori, per ogni gruppo G e per ogni funzione $f : S \to D(G)$ esiste un unico omomorfismo di gruppi $\tilde{f} :< S >\to G$ che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\sigma_S"] \arrow[dr, "f"'] & D(< S >) \arrow[d, "D\tilde{f})"] \\
 & D(G)
\end{tikzcd}$$

Questo fatto si può riassumere affermando che esiste una biiezione

$$\phi_{S,G} : \mathrm{Hom}_{Gr}(< S >, G) \to \mathrm{Hom}_{Set}(S, D(G)).$$

$\phi_{S,G}$ è naturale nelle due variabili, c'è quindi una situazione di aggiunzione
$< - > \vdash D$. Si noti che $\sigma_S : S \to D(< S >)$ è la funzione continua universale di S e $\sigma = (\sigma_S)_{S \in \mathbf{Set}} : 1_{\mathbf{Set}} \Rightarrow D(< - >)$ è l'unità di aggiunzione. Qual'è la counità ?

(5) Siano $\alpha : \mathbf{Gr} \to \mathbf{Ab}$ il funtore di abelianizzazione ed $\epsilon : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Gr}$ il funtore di immersione. Sulla falsariga dell'esempio precedente, mostrare che α è aggiunto a sinistra di ϵ.

(6) Denotiamo con **Pre** la categoria i cui oggetti sono gli insiemi preordinati e morfismi le funzioni monotone. La categoria **Pos** degli insiemi parzialmente ordinati è sottocategoria piena di **Pre**, sia $\epsilon : \mathbf{Pos} \to \mathbf{Pre}$ il funtore di immersione. Per ogni $(S, \leq) \in \mathbf{Pre}$ sia $(\tilde{S}, \leq)$ l'insieme parzialmente ordinato costruito in (Es. 1.2.2 (3)). Si ha un funtore $(\tilde{-}) : \mathbf{Pre} \to \mathbf{Pos}$ che è aggiunto a sinistra di ϵ. Infatti, per ogni $(S, \leq) \in \mathbf{Pre}$ e per ogni $(T, \leq) \in \mathbf{Pos}$ si ha una biiezione naturale

$$\phi_{S,T} : \mathrm{Hom}_{Pos}(\tilde{S}, T) \to \mathrm{Hom}_{Pre}(S, \epsilon(T)).$$

Le funzioni quoziente $P_S : S \to \tilde{S} = \epsilon(\tilde{S})$ costituiscono l'unità di aggiunzione.

1.4 Limiti e Colimiti

1.4.1 Esempi in Set.

(1) Se A e B sono due insiemi qualunque il loro prodotto cartesiano è il ben noto insieme $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, munito delle proiezioni sui fattori $\pi_A : A \times B \to A,\ (a, b) \mapsto a,$ et $\pi_B : A \times B \to A,\ (a, b) \mapsto b$. Se S è un altro insieme con funzioni $f : S \to A$ et $g : S \to B$, allora si può definire la funzione $< f, g >: S \to A \times B,\ s \mapsto (f(s), g(s))$ tale che

$$f = \pi_A \circ < f, g >, \quad g = \pi_B \circ < f, g > .$$

Naturalmente $< f, g >$ è l'unica funzione che verifica le richieste sopra. In diagramma

$$\begin{tikzcd}
& A \\
S \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "< f,g >"] \arrow[dr, "f"'] & A \times B \arrow[u, "\pi_A"'] \arrow[d, "\pi_B"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

(2) Se $\{A_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di insiemi indiciata sull'insieme I, si può generalizzare quanto sopra, con l'ovvio significato dei simboli:

$$\begin{tikzcd}
& A_i \\
S \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "< g_i >"] & \prod_{i \in I} A_i \arrow[u, "\pi_i"']
\end{tikzcd}$$

Qu$\frac{1}{2}$ il prodotto $\prod_{i \in I} A_i$ è l'insieme:

$$\{\alpha : I \to \cup_{i \in I} A_i \mid \alpha(i) \in A_i, \forall i \in I\}$$

e $\pi_i(\alpha) = \alpha(i)$.

(3) Un diagramma di funzioni

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

ammette un completamento commutativo

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

ove $P = \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$ e le funzioni $p_A : P \to A$ e $p_B : P \to B$ sono le restrizioni a P delle proiezioni del prodotto. Anche questa volta P, p_A, p_B sono univocamente determinati dalla seguente proprietà universale : se $s_A : S \to A,\ s_B : S \to B$ sono tali che $f \circ s_A = b \circ s_B$, esiste un'unica $t : S \to P$ con $p_a \circ t = s_A,\ p_B \circ t = s_B$.

(4) Sia $f : X \to Y$ una funzione e sia $B \subset Y$. Il quadrato

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

ove $a,\ b$ sono le inclusioni, è commutativo ed ha la seguente universale : se $s_X : S \to X,\ s_B : S \to B$ sono tali che $f \circ s_X = b \circ s_B$, esiste un'unica $t : S \to f^{-1}(B)$ con $a \circ t = s_X,\ b \circ t = s_B$. [Nota che $Im(s_X) \subset f^{-1}(B)$].

(5) Consideriamo una coppia di funzioni

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

e sia $E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$ il sottinsieme di A delle coincidenze di f e g, con l'inclusione $e : E \to A$. Se $s : S \to A$ è una qualunque altra funzione tale che $f \circ s = g \circ s$, allora esiste un unico modo per ottenere una una funzione t tale che $e \circ t = s$.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
& S \arrow[ul, "t"] \arrow[u, "s"'] &
\end{tikzcd}$$

(6) Un insieme P è puntiforme se e solo se per ogni altro insieme S, esiste esattamente una funzione $S \to P$.

1.4.2 Prodotti, pull-back ed egualizzatori.

Gli esempi dati forniscono l'idea per definire situazioni generali in una categoria $\mathbf{C}$.

(1) Sia $\mathcal{I}$ un insieme di indici e sia $\{A_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di oggetti di $\mathbf{C}$. Il **prodotto** in $\mathbf{C}$ di tale famiglia è costituito da un oggetto $\prod_{i\in I} A_i \in \mathbf{C}$ e da una famiglia di morfismi $p_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i,\ i \in I$, in modo tale che sia verificata la seguente proprietà universale:

- se $S \in \mathbf{C}$ è un altro oggetto, munito di morfismi $g_i : S \to A_i,\ \forall i \in I$, esiste un unico morfismo $g : S \to \prod_{i\in I} A_i$ tale che $p_i \circ g = g_i,\ \forall i \in I$. In diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & A_i \\
S \arrow[ur, "g_i"] \arrow[r, "g"] & \prod_{i\in I} A_i \arrow[u, "p_i"']
\end{tikzcd}$$

Scriveremo semplicemente $(\prod_{i\in I} A_i, p_i)$ per denotare, quando esiste, il prodotto della famiglia di oggetti A_i in $\mathbf{C}$.

(2) Dati due morfismi $f : A \to D$ e $g : B \to D$ di $\mathbf{C}$ il loro **pull-back** è un oggetto $P \in \mathbf{C}$ munito di morfismi $p_A : P \to A$ et $p_B : P \to B$ tale che $f \circ p_A = g \circ p_B$, in modo tale che sia soddisfatta la seguente proprietà

universale:

- se S è un altro oggetto dotato di morfismi $s_A : S \to A$ ed $s_B : S \to B$ con $f \circ s_A = g \circ s_B$, allora esiste un unico morfismo $t : S \to P$ tale che $p_A \circ t = s_A$ et $p_B \circ t = s_B$. In diagramma

$$\begin{tikzcd} S \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, bend left, "s_A"] \arrow[ddr, bend right, "s_B"'] & & \\ & P \arrow[r, "p_A"] \arrow[d, "p_B"] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \arrow[r, "g"] & D \end{tikzcd}$$

(3) Sia data una coppia di morfismi in $\mathbf{C}$

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B\ .$$

Il loro **egualizzatore** è una coppia data da un oggetto $Eq(f,g) \in \mathbf{C}$ e da un morfismo $e : Eq(f,g) \to A$ tale che $f \circ e = g \circ e$ in modo tale che sia verificata la seguente proprietà universale:

- se $s : S \to A$ è un morfismo tale che $f \circ s = g \circ s$, allora esiste un unico morfismo $t : S \to E$ con $e \circ t = s$. In diagramma

$$\begin{tikzcd} Eq(f,g) \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ & S \arrow[ul, "t"] \arrow[u, "s"'] & \end{tikzcd}$$

(4) Un **oggetto finale** (o terminale) per $\mathbf{C}$ è un oggetto T, codominio di un unico morfismo $S \to T$, per ogni altro oggetto $S \in \mathbf{C}$.

Esempi 1.4.1.

(1) Abbiamo di fatto già provato che la categoria degli insiemi **Set** ha prodotti, pull-back ed egualizzatori.

(2) La stessa cosa vale per la categoria **Gr** dei gruppi.
Infatti: se gli A_i sono gruppi, allora $\prod_{i\in I} A_i$ è anche un gruppo con la seguente operazione: date $f, g : I \to \cup_{i\in I} A_i$ si pone $f \cdot g : I \to \cup_{i\in I} A_i$, definita da $f \cdot g(i) = f(i)g(i),\ \forall i \in I$. L'elemento neutro è la funzione u tale che $u(i) = u_i$, con u_i l'elemento neutro di A_i. Le proiezioni del prodotto $\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i$ sono evidentemente degli omomorfismi.
Nel caso di due gruppi A e B il prodotto è dato dall'usuale prodotto di gruppi $A \times B$ con le ovvie proiezioni.

(3) Il pull-back (P, p_A, p_B) del diagramma di omomorfismi $f : A \to D$ e $g : B \to D$ di $\mathbf{C}$ è il sottogruppo P del gruppo prodotto $A \times B$ degli elementi (a, b) tali che $f(\pi_A(a, b)) = g(\pi_B(a, b))$. Gli omomorfismi p_A, p_B sono le restrizioni degli omomorfismi proiezione.

(4) L'insieme E delle coincidenze degli omomorfismi di gruppo $f, g : A \to B$ è un sottogruppo di A ed $e : E \to A$ è l'omomorfismo di inclusione.

(5) Il gruppo banale, costituito dal solo elemento neutro è l'oggetto finale di **Gr**.

1.4.3 Limiti.

Sia $\mathcal{I}$ una categoria piccola i cui oggetti indichiamo $i, j, \ldots$. Se $\mathbf{C}$ è una categoria qualunque un funtore $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ sarà detto un **diagramma** di tipo $\mathcal{I}$ in $\mathbf{C}$. Se $A \in \mathbf{C}$, denotiamo con

$$K_A : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$$

il diagramma costante di valore A. Si noti che:

- un morfismo $f : A \to B$ è la stessa cosa di una trasformazione naturale $K_A \Rightarrow K_B$, che denoteremo K_f.

• una trasformazione naturale $\alpha : K_A \Rightarrow \mathsf{D}$ è un **cono naturale** di vertice A, cioè una famiglia di morfismi $\{\alpha_i : A \to \mathsf{D}(i),\ \forall i \in \mathcal{I}\}$, tale che siano commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{D}(i) \arrow[dd, "\mathsf{D}(u)"] & & i \arrow[dd, "\forall\, u"'] \\
A \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[dr, "\alpha_j"'] & & & \\
 & \mathsf{D}(j) & & j
\end{tikzcd}$$

Definizione 1.4.2. *Il* **limite** *(anche* **limite inverso** *o* **limite proiettivo)** *del diagramma $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ è una coppia (L, l), ove $L \in \mathbf{C}$ et $l : K_L \Rightarrow \mathsf{D}$ è il* **cono limite** *che verifica la seguente proprietà universale :*

• *se $S \in \mathbf{C}$ ed $s : K_S \Rightarrow \mathsf{D}$ è un qualunque altro cono di vertice S, esiste un unico morfismo $t : S \to L$ tale che sia commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd}
K_L \arrow[r, Rightarrow, "l"] & \mathsf{D} \\
K_S \arrow[u, Rightarrow, "K_t"] \arrow[ur, Rightarrow, "s"'] &
\end{tikzcd} \qquad l \circ K_t = s\ ,$$

che si può esplicitare anche con

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathsf{D}(i) \arrow[dd, "\mathsf{D}(u)"] & i \arrow[dd, "\forall\, u"'] \\
S \arrow[urr, "s_i"] \arrow[r, "t"] \arrow[drr, "s_j"'] & L \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & & \\
 & & \mathsf{D}(j) & j
\end{tikzcd}$$

Ove $\mathsf{D}(u) \circ l_i = l_j,\ \mathsf{D}(u) \circ s_i = s_j,\ l_i \circ t = s_i,$ *per ogni* $u \in \mathcal{I}(i, j)$.

Spesso scriveremo soltanto $L = \varprojlim \mathsf{D}$ sottintendendo il cono limite $l = (l_i)_{i\in\mathcal{I}}$.

Si noti che:
se (L, l) ed (L', l') sono due limiti per D, allora, in base alla loro pèropriet? universale, esiste un unico isomorfismo $t : L \to L'$ tale che $l' \circ K_t = l$.
Allora il limite di un diagramma, quando esiste, è univocamente individuato a meno di isomorfismi.

Definizione 1.4.3. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice* **completa** *(risp.* **finitamente completa***) se esiste il limite di ogni diagramma* $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$*, per ogni categoria piccola (risp, finita)* $\mathcal{I}$*.*

Sia $\mathbf{C}$ una categoria completa ed $\mathcal{I}$ una data categoria piccola. Se $[\mathcal{I}, \mathbf{C}]$ è la categoria di funtori, si può considerare il funtore

$$\varprojlim : [\mathcal{I}, \mathbf{C}] \to \mathbf{C}, \quad \mathsf{D} \mapsto \varprojlim \mathsf{D}.$$

Infatti, se $\mathsf{D}, \mathsf{D}' : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ sono due funtori e $\tau = (\tau_i)_{i\in\mathcal{I}} : \mathsf{D} \Rightarrow \mathsf{D}'$ è una trasformazione naturale, allora $\varprojlim \tau$ è l'unico morfismo indotto dalla proprietà universale di $\varprojlim \mathsf{G}$ che commuta il diagramma.

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \mathsf{D} \arrow[r, "l_i"] \arrow[d, "\varprojlim \tau"'] & \mathsf{D}(i) \arrow[d, "\tau_i"] \\
\varprojlim \mathsf{D}' \arrow[r, "m_i"] & \mathsf{D}'(i)
\end{tikzcd}$$

Indichiamo poi con $K_{(-)} : \mathbf{C} \to [\mathcal{I}, \mathbf{C}]$ il funtore che associa ad ogni oggetto C di $\mathbf{C}$ il funtore costante $K_C : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$.

Proposizione 1.4.4. *Il funtore limite è aggiunto a destra del funtore* $K_{(-)}$*.*

Dim. Per ogni $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ e per ogni $C \in \mathbf{C}$ la biiezione

$$\phi_{C,\mathsf{D}} : \mathrm{Hom}(C, \varprojlim \mathsf{D}) \to Nat(K_C, \mathsf{D}),$$

è indotta dalla propriet? universale del limite. □

1.4.4 Colimiti.

Una trasformazione naturale $\alpha : \mathsf{D} \Rightarrow K_A$ è un **cocono naturale** di vertice A, cioè una famiglia di morfismi $\{\alpha_i : \mathsf{D}(i) \to A,\ \forall i \in \mathcal{I}\}$, tale che siano commutativi i diagrammi

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D}(i) \arrow[d, "\mathsf{F}(u)"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\ \mathsf{D}(j) \arrow[r, "\alpha_j"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i \arrow[d, "\forall\, u"'] \\ j \end{tikzcd}$$

Definizione 1.4.5. *Il* **colimite** *(anche* **limite diretto** *o* **limite iniettivo***) del diagramma* $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ *è una coppia* (m, M)*, ove* $M \in \mathbf{C}$ *et* $\mathsf{D} \Rightarrow K_L$ *è il* **cono colimite** *che verifica la seguente proprietà universale :*

- *se* $S \in \mathbf{C}$ *ed* $s : \mathsf{D} \Rightarrow K_S$ *è un qualunque altro cocono di vertice* S*, esiste un unico morfismo* $t : M \to S$ *tale che sia commutativo il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{D} \arrow[r, Rightarrow, "m"] \arrow[dr, Rightarrow, "s"'] & K_M \arrow[d, Rightarrow, "K_t"] \\ & K_S \end{tikzcd} \qquad K_t \circ l = s\ .$$

che si può esplicitare anche con

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}(i) \arrow[dd, "\mathsf{D}(u)"'] \arrow[dr, "m_i"] \arrow[drr, "s_i"] & & & & i \arrow[dd, "\forall\ u"'] \\
& M \arrow[r, "t"] & S & & \\
\mathsf{D}(j) \arrow[ur, "m_j"'] \arrow[urr, "s_j"'] & & & & j
\end{tikzcd}$$

Ove $m_j \circ \mathsf{D}(u) = m_i,\ s_j \circ \mathsf{D}(u) = s_i,\ t \circ m_i = s_i$, *per ogni* $u \in \mathcal{I}(i,j)$.

Si noti che:
Se (m, M) ed (m', M') sono due colimiti per D, allora esiste un unico isomorfismo $t : M \to M'$ tale che $m' \circ K_t = m$.
Allora il colimite di un diagramma, quando esiste, è univocamente individuato a meno di isomorfismi.

Spesso scriveremo soltanto $M = \varinjlim \mathsf{D}$ sottintendendo il cono colimite $m = (m_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Definizione 1.4.6. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice* **cocompleta** *(risp.* **finitamente cocompleta***) se esiste il colimite di ogni diagramma* $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$*, per ogni categoria piccola (risp, finita)* $\mathcal{I}$*.*

Analogamente a quanto visto in (1.6), se $\mathbf{C}$ è categoria cocompleta, allora si ottiene un funtore colimite

$$\varinjlim : [\mathcal{I}, \mathbf{C}] \to \mathbf{C}, \quad \mathsf{D} \mapsto \varinjlim \mathsf{D}$$

aggiunto a destra di $K_{(-)} : \mathbf{C} \to [\mathcal{I}, \mathbf{C}]$.

Proposizione 1.4.7. *Il funtore colimite è aggiunto a sinistra del funtore* $K_{(-)}$*.*

Dim. Per ogni $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ e per ogni $C \in \mathbf{C}$ la biiezione

$$\phi_{C,\mathsf{D}} : \mathrm{Hom}(\varinjlim \mathsf{D}, C) \to Nat(\mathsf{D}, K_C),$$

è indotta dalla propriet? universale del colimite. □

1.4.5 Coprodotti, push-out e coegualizzatori.

Tali nozioni sono esattamente le duali di quelle date in (1.2).

(1) Sia $\mathcal{I}$ un insieme di indici e sia $\{A_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ è una famiglia di oggetti di $\mathbf{C}$. Il **coprodotto** in $\mathbf{C}$ di tale famiglia è costituito da un oggetto $\coprod_{i\in I} A_i \in \mathbf{C}$ e da una famiglia di morfismi $q_i : A_i \to \coprod_{i\in I} A_i,\ i \in \mathcal{I}$, in modo tale che sia verificata la seguente proprietà universale :

- se $S \in \mathbf{C}$ è un altro oggetto, munito di morfismi $g_i : A_i \to S,\ \forall i \in \mathcal{I}$, esiste un unico morfismo $g : \coprod_{i\in I} A_i \to S$ tale che $g \circ q_i = g_i,\ \forall i \in \mathcal{I}$. In diagramma

$$\begin{tikzcd} & A_i \arrow[dl, "g_i"'] \arrow[d, "q_i"] \\ S & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

Scriveremo semplicemente $(q_i, \coprod_{i\in I} A_i)$ per denotare, quando esiste in $\mathbf{C}$, il coprodotto della famiglia di oggetti A_i.

(2) Dati due morfismi $f : A \to B$ e $g : A \to D$ di $\mathbf{C}$ il loro **push-out** è un oggetto $Q \in \mathbf{C}$ munito di morfismi $q_B : B \to Q$ et $q_D : D \to Q$ tale che $q_B \circ f = q_D \circ g$, in modo tale che sia soddisfatta la seguente proprietà universale :

- se S è un altro oggetto dotato di morfismi $s_D : D \to S$ ed $s_B : B \to S$ con $s_D \circ g = s_B \circ f$, allora esiste un unico morfismo $t : Q \to S$ tale che $t \circ q_B = s_B$ et $t \circ q_D = s_D$. In diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \arrow[d, "q_B"] \arrow[ddr, "s_B"] & \\ D \arrow[r, "q_D"] \arrow[drr, "s_D"'] & Q \arrow[dr, "t"] & \\ & & S \end{tikzcd}$$

(3) Data una coppia di morfismi in **C**

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B\ .$$

Il loro **coegualizzatore** è una coppia data da un oggetto $C \in \mathbf{C}$ e da un morfismo $c : B \to C$ tale che $c \circ f = c \circ g$ in modo tale che sia verificata la seguente proprietà universale:

- se $s : B \to S$ è un morfismo tale che $s \circ f = s \circ g$, allora esiste un unico morfismo $t : C \to S$ con $t \circ c = s$. In diagramma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "s"'] & & C \arrow[dl, "t"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

(4) Un **oggetto iniziale** per **C** è un oggetto I, dominio di un unico morfismo $I \to S$, per ogni altro oggetto $S \in \mathbf{C}$. I è univocamente determinato, a meno di isomorfismi.

Esempi 1.4.8.

(a) La categoria degli insiemi **Set** è dotata di

(1) Coprodotti: il coprodotto di una famiglia di insiemi $\{A_i \mid i \in I\}$ è la loro unione disgiunta, denotata $\coprod_{i \in I} A_i$, munita delle iniezioni canoniche

$$q_i : A_i \to \coprod_{i \in I} A_i,\ i \in \mathcal{I}.$$

(2) Coegualizzatori: data una coppia di morfismi

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

sia $C = B/\sim$, essendo $\sim$ la relazione generata dalle identificazioni degli elementi del tipo $f(a)$ e $g(a)$. per $a \in A$. Sia $c : B \to C$ la funzione quoziente.

* * *

Sia X un insieme e sia $S \subset X \times X$ una relazione su X. Esiste una relazione di equivalenza $R \subset X \times X$ tale $S \subset R$. R può essere descritta come segue: $a \sim b$ se e solo se esistono elementi $x_1, x_2, ..., x_n$ in X tali che $x_1 = a$, $x_n = b$ e tali che (x_i, x_{i+1}) oppure (x_{i+1}, x_i) è in R, per ogni $i = 1, ..., n-1$. L'intersezione di tutte le relazioni di equivalenza contenenti S è **la relazione di equivalenza generata da** S.

(3) Push-outs: dato il diagramma di funzioni

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & B \\ D & \end{tikzcd}$$

sia Q l'insieme che si ottiene dall'unione disgiunta $B \coprod D$, modulo l'identificazione degli elementi del tipo $f(a)$ e $g(a)$. Si pone poi q_B e q_D essere le composizioni della funzione continua quoziente $B \coprod D \to Q$ con le iniezioni canoniche.

(b) La categoria dei gruppi **Gr** è dotata di:

(1) Coprodotti: nel caso finito, il coprodotto di due gruppi G ed H è il cosiddetto **prodotto libero** $G * H$, costruito nel modo seguente: una parola è un prodotto $x_1 x_2 \cdots x_n$, ove ogni x_i è un elemento di G oppure di H. L'operazione in $G * H$ è quella di giustapposizione di due parole ridotte, modulo eventualmente operazioni di riduzione, come sopra. si ottiene una parola ridotta eliminando le eventuali unità e sostituendo due elementi consecutivi con il loro prodotto (in G oppure in H). I morfismi strutturali sono gli omomorfismi di inclusione

(2) Coegualizzatori: data una coppia di omomorfismi

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & H \end{tikzcd}$$

sia $S = \{f(x)g(x)^{-1} \mid x \in G\}$ e sia $[S]$ la sua chiusura normale. Il coegualizzatore di f e g è l'omomorfismo quoziente $q : H \to H/[S]$.

La chiusura normale $[S]$ di un sottinsieme S di un gruppo G è il sottogruppo di G generato dall'insieme $\{g^{-1}sg \mid g \in G,\ s \in S\}$.

(3) Push-outs: dato il diagramma di omomorfismi

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & K \\ H & \end{tikzcd}$$

si ottiene con la stessa procedura del caso **Set**.

1.4.6 Limiti e colimiti finiti.

Sia $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ un funtore.

1. Se $\mathcal{I}$ è la categoria priva di oggetti e morfismi allora il limite dell'unico funtore $\mathcal{I} \to \mathbf{C}$ è l'oggetto finale di $\mathbf{C}$ mentre il suo colimite fornisce l'oggetto iniziale.

2. Se
$$\mathcal{I} = \{ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd} , \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd} \}$$
è la categoria con due oggetti e solo i morfismi identici, il limite di D fornisce il prodotto di due oggetti di $\mathbf{C}$, mentre il colimite ne da il coprodotto.

3. Se $\mathcal{I}$ è una categoria piccola discreta (cioè priva di morfismi diversi dalle identità), il limite di D fornisce il prodotto della famiglia $\{\mathsf{D}(i) \mid i \in \mathcal{I}\}$.

4. Se
$$\mathcal{I} = \{ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r] & \bullet \arrow[loop above] & \bullet \arrow[loop above] \arrow[l] \end{tikzcd} \}$$
il limite di D fornisce il pull-back di due morfismi di $\mathbf{C}$ con stesso codominio.

5. Se

$$\mathcal{I} = \{ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] \arrow[loop above] & \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd} \}$$

   il colimite di D fornisce il push-out di due morfismi di $\mathbf{C}$ con stesso dominio.

6. Se

$$\mathcal{I} = \{ \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \bullet \arrow[loop above] \end{tikzcd} \}$$

   il limite di D fornisce l'egualizzatore di una coppia di morfismi di $\mathbf{C}$, mentre il colimite ne d? il coegualizzatore.

Allora oggetto finale, prodotti (finiti), pull-back ed egualizzatori, sono tutti esempi particolari di limiti (finiti) in $\mathbf{C}$. Analogamente, oggetto iniziale, coprodotti (finiti) e coegualizzatori, sono tutti esempi particolari di colimiti (finiti) in $\mathbf{C}$.

Teorema 1.4.9. *(Teorema di completezza.) Per una categoria* $\mathbf{C}$ *sono equivalenti le affermazioni seguenti:*

(1) $\mathbf{C}$ *è (finitamente) completa,*

(2) $\mathbf{C}$ *ha prodotti (finiti) ed egualizzatori,*

(3) $\mathbf{C}$ *ha prodotti (finiti) e pull-back.*

Dim. È chiaro che (1) $\Rightarrow$ (2). Proviamo (2) $\Rightarrow$ (3): sia dato il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

e consideriamo il prodotto

$$\begin{tikzcd} Y & X \times Y \arrow[l, "\pi_Y"'] \arrow[r, "\pi_X"] & X \end{tikzcd}$$

Posto

$$(E, e) = Eq(f \circ \pi_X, g \circ \pi_Y),$$

si ottiene il quadrato commutativo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

ove $p_X = \pi_X \circ e$ et $p_Y = \pi_Y \circ e$, che risulta essere un pull-back. Sia infatti

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "v"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

anche commutativo. Si ha che la propriet? universale del prodotto

$$\begin{tikzcd} & X \\ Q \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "< v, u >"] \arrow[dr, "u"'] & X \times Y \arrow[u, "\pi_X"'] \arrow[d, "\pi_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

induce l'unico morfismo $< v, u >: Q \to X \times Y$ che commuta i due triangoli. Sia ora

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \times Y \arrow[r, shift left, "f \circ \pi_X"] \arrow[r, shift right, "g \circ \pi_Y"'] & Z \\ & Q \arrow[ul, "t"] \arrow[u, "< v, u >"'] & \end{tikzcd}$$

Poichè $f \circ \pi_X \circ < v, u >= g \circ \pi_Y \circ < v, u >$, la proprietà universale dell'equalizzatore fornisce un unico $t : Q \to E$ tale che $e \circ t =< v, u >$. Infine

$$p_X \circ t = \pi_X \circ e \circ t = \pi_X \circ < v, u >= v,$$

$$p_Y \circ t = \pi_Y \circ e \circ t = \pi_Y \circ < v, u >= u,$$

che è ciò che si doveva provare.

(3) $\Rightarrow$ (2): sia data una coppia di morfismi $f, g : X \to Y$ e consideriamo il diagramma di pull-back

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_X"] \arrow[d, "p_Y"'] & X \arrow[d, "< f, g >"] \\
Y \arrow[r, "\Delta"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

ove

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "< f, g >"] \arrow[dr, "g"'] & Y \times Y \arrow[u, "\pi'_Y"'] \arrow[d, "\pi_Y"] & Y \arrow[ul, "1_Y"'] \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[dl, "1_Y"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

illustra i morfismi coinvolti. Proviamo che $(P, p_X) = Eq(f, g)$.
è $f \circ p_X = g \circ p_X$, infatti:

$$f \circ p_X = \pi'_Y \circ < f, g > \circ p_X = \pi'_Y \circ \Delta \circ p_Y = p_Y,$$

$$g \circ p_X = \pi_Y \circ < f, g > \circ p_X = \pi_Y \circ \Delta \circ p_Y = p_Y.$$

Sia $k : Z \to X$ tale che $f \circ k = g \circ k$ e consideriamo

$$\begin{tikzcd}
 & Y \\
Z \arrow[r, shift left, "< f,g > \circ k"] \arrow[r, shift right, "\Delta \circ g \circ k"'] & Y \times Y \arrow[u, "\pi"'] \arrow[d, "\pi"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

Si ha

$$\pi \circ (< f, g > \circ k) = f \circ k = g \circ k = \pi \circ (\Delta \circ g \circ k),$$

per entrambe le proiezioni π. La proprietà universale del prodotto fornisce

$$< f, g > \circ\, k = \Delta \circ g \circ k.$$

è allora commutativo il quadrato

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "g \circ k"'] & X \arrow[d, "< f,g >"] \\
Y \arrow[r, "\Delta"] & Y \times Y
\end{tikzcd}$$

e pertanto, la proprietà universale del pull-back fornisce un unico morfismo $t : Z \to P$ tale che $p_Y \circ t = f \circ k$ e $p_X \circ t = k$. Quest'ultimo fatto è ciò che si doveva provare.

(2) $\Rightarrow$ (1): sia $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ un diagramma in $\mathbf{C}$.
Poniamo

$$X = \prod_{i \in \mathcal{I}} \mathsf{D}(i)$$

con proiezioni $p_i : X \to \mathsf{D}(i)$, e

$$Y = \prod_{s \in Mor\mathcal{I}} \mathsf{D}(c(s))$$

con proiezioni $q_s : X \to \mathsf{D}(c(s))$ [$c(s) = codominio(s)$].
Per la proprietà universale del prodotto, esiste un unico $f : X \to Y$ tale che $q_s \circ f = p_{c(s)}$, per ogni $s \in Mor\ \mathcal{I}$,

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{D}(c(s)) \\ X \arrow[ur, "p_{c(s)}"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "q_s"'] \end{tikzcd}$$

ed esiste anche un unico $g : X \to Y$ che commuta il quadrato seguente [$d(s) = dominio(s)$].

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p_{d(s)}"'] & Y \arrow[d, "q_s"] \\ \mathsf{D}(d(s)) \arrow[r, "\mathsf{D}(s)"] & \mathsf{D}(c(s)) \end{tikzcd}$$

Poniamo

$$(K, v) = Eq(f, g)$$

e proviamo che $K = \varprojlim \mathsf{D}$ con proiezioni

$$l_i = p_i \circ v : K \to \mathsf{D}(i),\ i \in \mathcal{I}.$$

Per $s : i \to j$ in $\mathcal{I}$ si ha:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{D}(i) \arrow[dd, "\mathsf{D}(s)"] & & i \arrow[dd, "\forall\ s"'] \\ K \arrow[ur, "l_i"] \arrow[dr, "l_j"'] & & & \\ & \mathsf{D}(j) & & j \end{tikzcd}$$

cioè $\mathsf{D}(s) \circ l_i = l_j$. Infatti

$$\mathsf{D}(s) \circ l_i = \mathsf{D}(s) \circ p_i \circ v = q_s \circ g \circ v = p_j \circ v = l_j.$$

Sia poi $\{h_i : H \to \mathsf{D}(i) \mid i \in \mathcal{I}\}$ un cono su D. Per la proprietà universale del prodotto esiste un unico $t_1 : H \to X$ tale che

$$p_i \circ t_1 = h_i, \ \forall i \in \mathcal{I},$$

allora, $\forall s \in Mor\ \mathcal{I}$, risulta

$$q_s \circ f \circ t_1 = p_{c(s)} \circ t_1 = h_{c(s)},$$

$$q_s \circ g \circ t_1 = \mathsf{D}(s) \circ p_{d(s)} \circ t_1 = \mathsf{D}(s) \circ h_{d(s)} = h_{c(s)},$$

da cui segue

$$f \circ t_1 = g \circ t_1.$$

Dalla proprietà universale dell'egualizzatore si ottiene l'esistenza di un unico morfismo $t : H \to K$ tale che $v \circ t = t_1$. Infine $l_i \circ t = h_i, \ \forall i \in \mathcal{I}$. $\square$

Per semplice dualizzazione si ottiene "gratis" il :

Teorema 1.4.10. *(Teorema di cocompletezza.) Per una categoria* **C** *sono equivalenti le affermazioni seguenti:*

(1) **C** *è (finitamente) cocompleta,*

(2) **C** *ha coprodotti (finiti) e coegualizzatori,*

(3) **C** *ha coprodotti (finiti) e push-out.*

1.4.7 Conservazione.

Definizione 1.4.11. *Sia* $\mathsf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *un funtore covariante e sia* $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ *un diagramma in* $\mathbf{C}$ *che ammette limilte* $(\varprojlim \mathsf{D}, l)$. G **conserva il limite** *del diagramma* F *se esiste* $(\varprojlim \mathsf{G} \circ \mathsf{D}, l')$ *e vale*

$$\mathsf{G}(\varprojlim \mathsf{D}) = \varprojlim \mathsf{G} \circ \mathsf{D}, \quad l' = \mathsf{G}(l).$$

Si ha:

Teorema 1.4.12.

(1) *Gli* Hom-*funtori covarianti conservano i limiti. In formula*

$$\mathrm{Hom}(X, \varprojlim \mathsf{D}) = \varprojlim \mathrm{Hom}(X, \mathsf{D}(-)).$$

(2) *Gli* Hom-*funtori contravarianti trasformano i limiti in colimiti. In formula*

$$\mathrm{Hom}(\varprojlim \mathsf{D}, X) = \varinjlim \mathrm{Hom}(\mathsf{D}(-), X).$$

Dim. Proviamo soltanto la prima affermazione. Sia $X \in \mathbf{C}$. Per ogni $u : i \to j$ in $\mathcal{I}$ si ha un diagrammma commutativo

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}(X, \mathsf{D}(i)) \arrow[dd, "\mathsf{D}(u)^*"] \\
\mathrm{Hom}(X, \varprojlim \mathsf{D}) \arrow[ur, "l_i^*"] \arrow[dr, "l_j^*"'] & \\
& \mathrm{Hom}(X, \mathsf{D}(j))
\end{tikzcd}$$

Supponiamo poi di avere un cono

$$(S, f_i : S \to \mathrm{Hom}(X, \mathsf{D}(i))).$$

Allora, per ogni $s \in S$,

$$\{f_i(s) : X \to \mathsf{D}(i),\ i \in \mathcal{I}\}$$

è un cono su D. Pertanto esiste un unico morfismo $h_s : X \to \varprojlim \mathsf{D}$ tale che $l_i \circ h_s = f_i(s)$, per ogni $i \in \mathcal{I}$. Si ottiene una funzione

$$h : S \to \mathrm{Hom}(X, \varprojlim \mathsf{D}), \quad s \mapsto h_s,$$

con la propriet? che

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}(X, \mathsf{D}(i)) \\ S \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "h"] & \mathrm{Hom}(X, \varprojlim \mathsf{D}) \arrow[u, "l_i^*"'] \end{tikzcd}$$

è commutativo. è chiaro che h è l'unica funzione con tale proprietà . □

Proposizione 1.4.13. *Un funtore* $\mathsf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *conserva i limiti che esistono in* $\mathbf{C}$ *se e solo se, per ogni* $X \in \mathbf{D}$*, li conserva il funtore*

$$\mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(-)) \ : \mathbf{C} \xrightarrow{\mathsf{G}} \mathbf{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(X,-)} \mathbf{Set}$$

Dim. Una implicazione segue dal teorema precedente. Viceversa, supponiamo che il funtore $\mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(-))$ conservi i limiti che esistono in $\mathbf{C}$ e sia $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ un diagramma che ammette limite. Allora

$$\mathrm{Hom}(X, \mathsf{G}(\varprojlim \mathsf{D})) = \varprojlim \mathrm{Hom}(X, \mathsf{GD}(-)),$$

ma anche

$$\varprojlim \mathrm{Hom}(X, \mathsf{GD}(-)) = \mathrm{Hom}(X, \varprojlim \mathsf{GD}(-))$$

ancora per il teorema precedente. Quindi l'asserto in base a 1.4.6(1) e 1.2.4. □

Proposizione 1.4.14. *Un funtore* $\mathsf{G} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *conserva i colimiti che esistono in* $\mathbf{C}$ *se e solo se, per ogni* $X \in \mathbf{D}$*, il funtore*

$$\mathrm{Hom}(\mathsf{G}(-), X) \ : \mathbf{C} \xrightarrow{\mathsf{G}} \mathbf{D} \xrightarrow{\mathrm{Hom}(-,X)} \mathbf{Set}$$

trasforma limiti in colimiti.

Dim. supponiamo che il funtore $\mathrm{Hom}(\mathsf{G}(-), X)$ trasformi limiti in colimiti sia $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ un diagramma che ammette colimite, allora

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(\mathsf{GD}(-), X) = \mathrm{Hom}(\mathsf{G}(\varprojlim \mathsf{D})), X),$$

ma anche

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(\mathsf{GD}(-), X) = \mathrm{Hom}(\varprojlim \mathsf{GD}(-), X),$$

quindi l'asserto in base a 1.4.6(2) e 1.2.4.

□

Teorema 1.4.15. *Gli aggiunti a sinistra conservano i colimiti e gli aggiunti a destra conservano i limiti.*

Dim. Sia data l'aggiunzione $< \mathsf{F}, \mathsf{G}, \Phi >$. Per ogni $X \in \mathbf{C}$ l'isomorfismo naturale

$$\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(\mathsf{F}(X), -) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \mathsf{G}(-))$$

è una rappresentazione del funtore $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, \mathsf{G}(-)) : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, pertanto quest'ultimo conserva i limiti ed, in base alla Proposiuzione 1.4.9, G conserva i limiti. Dualmente per i colimiti. □

1.4.8 Riflessioni e coriflessioni.

Sia $\mathbf{C}$ una sottocategoria piena ed **isochiusa** della categoria $\mathbf{D}$, cioè, se $X \in \mathbf{C}$ e $Y \in \mathbf{D}$ sono oggetti isomorfi, allora $Y \in \mathbf{C}$. Denotiamo con $\mathsf{E} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ il funtore di immersione.

Definizioni 1.4.16.

(1) $\mathbf{C}$ *è* **riflessiva** *in* $\mathbf{D}$ *se esiste un aggiunto a sinistra* $\mathsf{R} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *per* E. *Il funtore* R *si chiama* **riflettore** *.*

(2) $\mathbf{C}$ *è* **coriflessiva** *in* $\mathbf{D}$ *se esiste un aggiunto destra* $\mathsf{C} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *per* E. *Il funtore* C *si chiama* **coriflettore**.

Se $\mathcal{A}$ *è una classe di morfismi di* $\mathbf{D}$ *diremo anche che:*

(3) **C** *è* $\mathcal{A}$**-riflessiva** *in* **D** *se l'unità di aggiunzione*

$$\rho = (\rho_X)_{X \in \mathbf{C}} : 1_X \Rightarrow \mathsf{E} \circ \mathsf{R}$$

è costituita da morfismi $\rho_X \in \mathcal{A}$.

(4) **C** *è* $\mathcal{A}$**-coriflessiva** *in* **D** *se la counità di aggiunzione*

$$\gamma = (\gamma_Y)_{Y \in \mathbf{D}} : \mathsf{R} \circ \mathsf{E} \Rightarrow 1_{\mathbf{D}}$$

è costituita da morfismi $\gamma_Y \in \mathcal{A}$.

Nel caso di riflessione, per $X \in \mathbf{D}$ si ha la seguente situazione: per ogni morfismo $f : X \to Y = \mathsf{E}(Y)$, $Y \in \mathbf{C}$, esiste un unico morfismo $\tilde{f} : \mathsf{R}(X) \to Y$ che commuta il triangolo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\rho_X"] \arrow[dr, "f"'] & \mathsf{R}(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& Y
\end{tikzcd}\quad .$$

La situazione di coriflessione è illustrata dal diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{C}(X) \arrow[r, "\gamma_X"] & X \\
Y \arrow[u, "\tilde{g}"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

per ogni $g : Y = \mathsf{E}(Y) \to X$ esiste un unico morfismo $\tilde{g} : Y \to C(X)$ tale che $\gamma_X \circ \tilde{g} = g$.

Gli esempi (5) e (6) in (1.3.9) sono situazioni di riflessione.

Definizione 1.4.17. *Sia* **C** *una categoria e siano* $\mathcal{E}$ *una classe di epimorfismi di* **C** *ed* $\mathcal{M}$ *una classe di monomorfismi di* **C** *chiuse rispetto alla composizione. Si dice che* **C** *ammette una fattorizzazione* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *se:*

(1) *ogni morfismo* $f : X \to Y$ *di* $\mathbf{C}$ *si decompone come* $f = m \circ e$*, con* $e \in \mathcal{E}$ *ed* $m \in \mathcal{M}$*,*

(2) $f \in \mathcal{M} \cap \mathcal{E} \Leftrightarrow f$ *è un isomorfismo,*

(3) $n' \circ n \in \mathcal{M} \Rightarrow n \in \mathcal{M}$*,*

(4) $e' \circ e \in \mathcal{E} \Rightarrow e' \in \mathcal{E}$*.*

Teorema 1.4.18. *Sia* $\mathbf{D}$ *una categoria con una fattorizzazione* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$*,* $\mathcal{E}$*-cowell powered e dotata di prodotti. Sia* $\mathbf{C}$ *una sottocategoria piena di* $\mathbf{D}$*. Sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{C}$ *è* $\mathcal{E}$*-riflessiva in* $\mathbf{D}$*,*

(2) $\mathbf{C}$ *è chiusa rispetto ai prodotti ed agli* $\mathcal{M}$*-sottoggetti (cioè, se* $m : X \to Y$*, con* $m \in \mathcal{M}$ *e* $Y \in \mathbf{C}$*, allora* $X \in \mathbf{C}$*).*

Dim.
(1) $\Rightarrow$ (2). Sia $m : X \to Y$, con $m \in \mathcal{M}$ e $Y \in \mathbf{C}$. Sia $\rho_X : X \to \mathsf{R}(X)$ la riflessione di X in $\mathbf{C}$. Esiste un unico morfismo $h : \mathsf{R}(X) \to Y$ tale che $h \circ \rho_X = m$. Allora $\rho_X \in \mathcal{M}$, così $X \cong \mathsf{R}(X) \in \mathbf{C}$.
(2) $\Rightarrow$ (1). Sia $X \in \mathbf{D}$ e sia

$$\Lambda = \{(Y, f) \mid Y \in \mathbf{C}, f : X \to Y,\ f \in \mathcal{M},\ Y \in \mathbf{C}\},$$

che può essere considerato un insieme, essendo $\mathbf{D}$ cowell-powered. Esiste allora il prodotto $\prod_{(Y,\, f) \,\in\, \Lambda} Y \in \mathbf{C}$ e dal diagramma

$$\begin{tikzcd} & Y \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\phi"] & \prod_{(Y,\, f) \,\in\, \Lambda} Y \arrow[u, "\pi_{(Y,\, f)}"'] \end{tikzcd}$$

si ricava l'esistenza di un unico morfismo $\phi : X \to \prod_{(Y,\, f) \,\in\, \Lambda} Y$ tale che $\pi_{(Y,\, f)} \circ \phi = f$, per ogni $(Y, f) \in \Lambda$. Se ora

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\rho_X"'] & & \prod_{(Y,\,f)\,\in\,\Lambda} Y \\
& \mathsf{R}(X) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

è la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ fattorizzazione di ϕ, si ha che $\mathsf{R}(X) \in \mathbf{C}$ e che $\rho_X : X \to \mathsf{R}(X)$ è una riflessione di X in $\mathbf{C}$. $\square$

Proposizione 1.4.19. *Se* $\mathbf{C}$ *è epiriflessiva in* $\mathbf{D}$ *con riflettore* $\mathsf{R} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, *allora* $\mathbf{C}$ *è chiusa rispetto ai limiti. Pertanto una sottocategoria epiriflessiva di una categoria completa è completa.*

Dim. Sia $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ un diagramma per cui esiste in $\mathbf{D}$ il $L = \varprojlim \mathsf{E} \circ \mathsf{D}$, essendo E il funtore di inclusione. Dal diagramma

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\rho_L"] \arrow[dr, "l_i"'] & \mathsf{R}(L) \arrow[d, "\overline{l_i}"] \\
& \mathsf{D}(i)
\end{tikzcd}
$$

si ricava l'esistenza di un cono naturale $\bar{l} : \mathsf{R}(L) \to \mathsf{D}$ tale che $\bar{l} \circ \rho_L = l$. Per la proprietà universale del limite esiste poi un unico morfismo $h : \mathsf{R}(L) \to L$ con $l \circ h = \bar{l}$. Si ha:

$$l_i \circ h \circ \rho_L = l_i, \quad \text{per ogni} \quad i \in \mathcal{I},$$

quindi $h \circ \rho_L = id$. Poichè ρ_L è un epimorfismo invertibile a sinistra, segue che esso è un isomorfismo. $\square$

Proposizione 1.4.20. *Sia* $\mathbf{C}$ *riflessiva in* $\mathbf{D}$ *con riflettore* $\mathsf{R} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *e sia* $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ *un diagramma per cui esiste in* $\mathbf{D}$ *il colimite* $K = \varinjlim \mathsf{E} \circ \mathsf{D}$, *con* $k : \mathsf{D} \Rightarrow K$ *il cocono limite. Allora* $(\rho_K \circ k, \mathsf{R}(K))$ *è il colimite di* D *in* $\mathbf{C}$.

Dim. Consideriamo il cocono

$$\mathsf{D} \overset{k}{\Longrightarrow} K \xrightarrow{\rho_K} \mathsf{R}(K)$$

e sia $n : \mathsf{D} \Rightarrow N$ un qualunque altro cocono, con $N \in \mathbf{C}$. Allora, per la proprietà universale del colimite, esiste un unico morfismo $t : K \to N$ tale che $t \circ k = n$. Per la proprietà universale della coriflessione, esiste un unico morfismo $v : \mathsf{R}(K) \to N$ tale che $v \circ \rho_K = t$. Infine $v \circ \rho_K \circ k = n$. □

Segue:

Proposizione 1.4.21. *Una sottocategoria riflessiva di una categoria cocompleta è cocompleta.*

Il duale del Teorema 1.4.17 e quello della Proposizione 1.4.19 si enunciano come segue:

Teorema 1.4.22. *Sia* $\mathbf{D}$ *una categoria con una fattorizzazione* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$*,* $\mathcal{M}$*-well powered e dotata di coprodotti. Sia* $\mathbf{C}$ *una sottocategoria piena di* $\mathbf{D}$*. Sono equivalenti:*

(1) $\mathbf{C}$ *è* $\mathcal{M}$*-coriflessiva in* $\mathbf{D}$*,*

(2) $\mathbf{C}$ *è chiusa rispetto ai coprodotti ed agli* $\mathcal{E}$*-oggetti quoziente (cioè, se* $q : X \to Y$*, con* $q \in \mathcal{E}$ *e* $X \in \mathbf{C}$*, allora* $Y \in \mathbf{C}$*).*

Proposizione 1.4.23. *Sia* $\mathbf{C}$ *coriflessiva in* $\mathbf{D}$ *con coriflettore* $\mathsf{C} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *e sia* $\mathsf{D} : \mathcal{I} \to \mathbf{C}$ *un diagramma per cui esiste in* $\mathbf{D}$ *il limite* $L = \varprojlim \mathsf{C} \circ \mathsf{D}$*, con* $l : L \Rightarrow \mathsf{D}$ *il cono limite. Allora* $(l \circ \gamma_L, \mathsf{C}(L))$ *è il limite di* D *in* $\mathbf{C}$*.*

Capitolo 2

Elementi di Topologia Generale

2.1 Alcune proprietà utili.

Sarà utile nel seguito avere a disposizione le seguenti proprietà insiemistiche.

Sia $f : X \to Y$ una funzione, allora:

1. $A \subset B \subset Y \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A)$,
2. $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$,
3. $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$,
4. $f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$,
5. $A \subset X \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$, (se f è iniettiva $A = f^{-1}(f(A))$,
6. $B \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$, (se f è suriettiva $B = f(f^{-1}(B))$,
7. se $A \subset X,\ B \subset Y$ allora $f_{|A}^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cap A$,
8. se $A \subset X,\ B \subset Y$ allora $A \cap f^{-1}(B) = \emptyset \Leftrightarrow f(A) \cap B = \emptyset$.
9. $E, B \subset X \Rightarrow E - (X - B) = E \bigcap B$,

10. $E, A, B \subset X \Rightarrow E - (A \bigcap B) = (E - A) \bigcup (E - B)$,
11. Se $U, V \in X$, allora $U \cap V = \emptyset \Leftrightarrow (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$,
12. $X - \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (X - A_\lambda)$.
13. $X - \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (X - A_\lambda)$.

Le ultime due sono le Leggi di De Morgan

2.2 La categoria degli spazi topologici. Top.

Sia X un insieme e τ una famiglia di sottinsiemi di X. τ è una **topologia** su X se verifica le seguenti richieste :

- $\emptyset, X \in \tau$,
- τ è chiusa rispetto alle unioni,
- τ è chiusa rispetto alle intersezioni finite.

Uno **spazio topologico** è una coppia (X, τ), con X un insieme e τ una topologia su X. Gli elementi di τ si dicono gli insiemi **aperti** della topologia.

Siano (X, τ), (Y, σ) due spazi topologici. Una funzione $f : X \to Y$ si dice **continua** se verifica la condizione

$$f^{-1}(V) \in \tau, \quad \text{per ogni} \quad V \in \sigma.$$

In altre parole f è continua se e solo se le immagini inverse degli aperti di Y sono aperti di X.
Sono evidenti le affermazioni seguenti:

- l'applicazione identica $1_X : X \to X$ è continua (qualunque sia la topologia τ fissata su X),
- se $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ e $g : (Y, \sigma) \to (Z, \delta)$ sono funzioni continue, tale è anche la loro composizione $g \circ f : (X, \tau) \to (Z, \delta)$.

  Allora spazi topologici e funzioni continue costituiscono una categoria, che denoteremo **Top**.

I complementari degli insiemi aperti di X si dicono **chiusi**. La famiglia degli insiemi chiusi di (X, τ) ha le proprietà seguenti :

- $\emptyset, X$ sono chiusi
- è chiusa rispetto alle unioni finite,
- è chiusa rispetto alle intersezioni.

La prova di questo fatto è immediata e discende dalle Leggi di De Morgan.

- *è chiaro che una topologia su X può essere data sia attraverso la famiglia dei suoi aperti, sia dei suoi chiusi.*

- *è anche chiaro che una funzione $f : X \to Y$ di spazi topologici è continua se e solo se l'immagine inversa di un chiuso di Y è chiuso in X.*

Nel seguito adopereremo liberamente le parole funzione/applicazione aggiungendo continua quando sia il caso.

- Se (X, τ) è uno spazio topologico ed $Y \subset X$, la famiglia di insiemi

$$\{A \cap Y \mid A \in \tau\}$$

è una topologia su Y, detta la **topologia relativa** su Y. In questo senso si dirà che Y è un **sottospazio** di X.

Siano (X, τ), (Y, σ) due spazi topologici. Una funzione continua $f : X \to Y$ è un monomorfismo (risp. un epimorfismo) in **Top** precisamente quando è una funzione iniettiva (risp. suriettiva).
$f : X \to Y$ è una sezione (risp. retrazione) se ammette una inversa sinistra (risp. destra) continua.

Se X è un insieme non vuoto ed $A \subset X$, allora $\tau = \{\emptyset, A, X\}$ è una topologia su X. Sia poi $\delta = \{\emptyset, X\}$ la **topologia indiscreta** su X. La funzione identica di X è continua come funzione continua da $(X, \tau) \to (X, \delta)$ mentre la sua inversa $1_X : (X, \delta) \to (X, \tau)$ non lo è. Allora:

• gli isomorfismi in **Top** sono le funzioni continue biiettive la cui inversa è pure continua. Un isomorfismo di **Top** si chiama un **omeomorfismo**.

• le funzioni continue biiettive si chiamano **bimorfismi**. Ogni omeomorfismo è un bimorfismo, ma il vicevera è falso, come mostra l'esempio precedente.

• una funzione continua $f : X \to Y$ è una **immersione topologica** se $f : X \to f[X]$ è un omeomorfismo.

Definizione 2.2.1. *Siano (X, τ) uno spazio topologico ed $E \subset X$. Poniamo*

$$\overline{E} = \bigcap \{K \in \mathcal{P}(X) \mid E \subset K, K \text{ chiuso in } X\}.$$

$\overline{E}$ si chiama la **chiusura** *di E in X.*

Teorema 2.2.2. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. La corrispondenza*

$$\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad E \mapsto \overline{E},$$

ha le seguenti proprietà

(0) *E è chiuso in X se e solo se $E = \overline{E}$.*

(1) *$E \subset \overline{E}$ (espansiva),*

(2) *$A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ (monotona),*

(3) *$\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ (idempotente),*

(4) *$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (additiva),*

(5) *$\overline{\emptyset} = \emptyset$ e $\overline{X} = X$,*

Viceversa: se X è un insieme munito di una corrispondenza $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $E \mapsto \overline{E}$, che verifica le (1),..., (5), allora si ottiene una topologia su X i cui chiusi sono definiti dalla (0).

Dim. Solo la (0) e la (4) necessitano di una dimostrazione.
(0): si noti che per ogni $K \subset X$ chiuso contenente E è $X - K$ aperto contenuto in $X - E$, segue

$$X - \overline{E} = X - \bigcap \{K \subset X \mid E \subset K, K \text{ chiuso in } X\} =$$

$$= \bigcup \{X - K \subset X \ | E \subset K, K \text{ chiuso in } X\}$$

è aperto.
(4): poichè $\overline{A} \cup \overline{B}$ è un chiuso contenente $A \cup B$, si ha $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. D'altra parte $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$, e quindi l'inclusione opposta.
Viceversa: la famiglia degli insiemi chiusi definiti dalla (0), contiene $\emptyset$ e X ed è chiusa rispetto alle unioni finite. Rimane da provare che essa è chiusa rispetto alle intersezioni. Sia $\{F_i \mid i \in I\}$ una famiglia di sottinsiemi di X tali che $F_i = \overline{F_i}$, per ogni $i \in I$. Allora

$$\bigcap F_i = \bigcap \overline{F_i} \subset \overline{\bigcap F_i}$$

e

$$\bigcap F_i \subset F_i, \quad \text{per ogni } i \in I, \quad \Rightarrow \quad \overline{\bigcap F_i} \subset \overline{F_i}, \quad \text{per ogni } i \in I,$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\bigcap F_i} \subset \bigcap \overline{F_i}.$$

□

Una corrispondenza $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $E \mapsto \overline{E}$, su un insieme X, che verifichi le (1),..., (5) del teorema, si chiama un **operatore di chiusura di Kuratowski** su X.
Abbiamo visto che ogni topologia su X definisce un operatore di chiusura di Kuratowski e, viceversa, ogni operatore di chiusura di Kuratowski definisce una topologia su X.

Quanto visto in questo paragrafo può essere "dualizzato" nel modo che segue:

Definizione 2.2.3. *Siano (X, τ) uno spazio topologico ed $E \subset X$. Poniamo*

$$E^\circ = \bigcup \{A \in \mathcal{P}(X) \ | A \subset E, A \text{ aperto in } X\}.$$

*E° si chiama l'**interno** di E in X.*

Teorema 2.2.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. La corrispondenza*

$$\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad E \mapsto E^\circ$$

ha le seguenti proprietà

(0) *E è aperto in X se e solo se $E = E^\circ$.*

(1) *$E^\circ \subset E$,*

(2) *$A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$,*

(3) *$(E^\circ)^\circ = E^\circ$,*

(4) *$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,*

(5) *$\emptyset^\circ = \emptyset$ e $X^\circ = X$,*

Viceversa: se X è un insieme munito di una corrispondenza $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $E \mapsto E^\circ$ che verifica le (1), ..., (5), allora si ottiene una topologia su X i cui aperti sono definiti dalla (0).

Proposizione 2.2.5. *Valgono le relazioni:*

(1) $X - E^\circ = \overline{X - E}$,.

(2) $X - \overline{E} = (X - E)^\circ$.

Dim. Per la (1): $X - E^\circ = X - \bigcup\{A \subset E \mid A \text{ aperto}\} = \bigcap\{X - A \supset E \mid A \text{ aperto}\} = \overline{X - E}$. Analogamente per la (2). □

Definizione 2.2.6. *Siano (X, τ) uno spazio topologico ed $E \subset X$. La frontiera (o bordo) di E è l'insieme chiuso*

$$Fr_X(E) = \overline{E} \cap \overline{(X - E)}.$$

Proposizione 2.2.7. *Valgono le relazioni:*

- $\overline{E} = E \cup Fr_X(E)$,
- $E^\circ = E - Fr_X(E)$.

Dim. Per la prima:

$$E \cup Fr_X(E) = E \cup (\overline{E} \cap \overline{(X - E)}) = (E \cup \overline{E}) \cap (E \cup \overline{(X - E)} = \overline{E} \cap X = \overline{E}.$$

Per la seconda:

$$E - Fr_X(E) = E - \overline{E} \cap \overline{(X-E)} = (E - \overline{E}) \cap (E - \overline{(X-E)}) =$$

$$= \emptyset \cup (E - \overline{(X-E)}) = E - (X - E^\circ) = E \cap E^\circ = E^\circ.$$

□

2.2.1 Intorni.

Definizione 2.2.8. *Sia (X,τ) uno spazio topologico ed $x \in X$. Un* **intorno** *di x è un sottinsieme $U \subset X$ contenente un aperto V contenente x.*

Da notare che U è un intorno di x se e solo se $x \in U^\circ$. Denotiamo con $\mathcal{U}_x$ la famiglia degli intorni di x in X.

Teorema 2.2.9. *Sia (X,τ) uno spazio topologico. La famiglia $\mathcal{U}_x$ degli intorni di $x \in X$ ha le seguenti proprietà :*

(0) *$G \subset X$ è aperto se e solo se G contiene un intorno di ogni suo punto.*

(1) $U \in \mathcal{U}_x \Rightarrow x \in U$,

(2) $U, V \in \mathcal{U}_x \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}_x$,

(3) *se $U \in \mathcal{U}_x$ esiste $V \in \mathcal{U}_x$ tale che $U \in \mathcal{U}_y$, per ogni $y \in V$,*

(4) $U \in \mathcal{U}_x$, $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x$,

Viceversa, se X è un insieme tale che per ogni $x \in X$ è assegnata una famiglia di sottinsiemi $\mathcal{U}_x$ che verifica (1), (2), (3), (4), allora esiste una topologia su X i cui aperti sono definiti dalla (0), per la quale $\mathcal{U}_x$ è una base di intorni per ogni $x \in X$.

Dim. Solo la (0) e la (3) necessitano dimostrazione.
(0): se G è aperto, allora $G = G^\circ$. Viceversa se G contiene un intorno V di ogni suo punto, allora $G = \bigcup_{V \in \mathcal{U}_x} V^\circ$ è aperto.
(3): per $U \in \mathcal{U}_x$ basta prendere $V = U^\circ$.
Viceversa, sia τ la famiglia degli $G \in \mathcal{P}(X)$ con la proprietà di contenere un

elemento di $\mathcal{U}_x$, per ogni $x \in G$. Proviamo che τ è una topologia su X. Se $G_i \in \tau$, $\forall i \in I$, allora si ha subito che $\bigcup G_i \in \tau$. Se I è un insieme finito, consideriamo $x \in \bigcap G_i$. Allora $x \in G_i$, $\forall i \in I$. Sia $U_i \in \mathcal{U}_x$, $\forall i \in I$. Dalla (2) segue che $U = \bigcap U_i \in \mathcal{U}_x$, il che conclude la dimostrazione. □

Definizione 2.2.10. *Sia (X, τ) uno spazio topologico ed $x \in X$. Una sottofamiglia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ è una* **base di intorni** *per x se per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ esiste $V \in \mathcal{B}_x$ tale che $V \subset U$, cosicchè*

$$\mathcal{U}_x = \{U \subset X \mid V \subset U, \ \text{per qualche} V \in \mathcal{B}_x\}.$$

Proposizione 2.2.11. *Una base di intorni $\mathcal{B}_x$ per $x \in X$ ha le seguenti proprietà*

(0) *$G \subset X$ è aperto se e solo se G contiene un intorno basico di ogni suo punto.*

(1) *$V \in \mathcal{B}_x \Rightarrow x \in V$,*

(2) *se $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, esiste $V_3 \in \mathcal{B}_x$ con $V_3 \subset V_1 \cap V_2$,*

(3) *se $V \in \mathcal{B}_x$ esiste $V_0 \in \mathcal{U}_x$ tale che se $y \in V_0$ esiste qualche $W \in \mathcal{B}_y$ con $W \subset V$.*

Viceversa, se X è un insieme tale che per ogni $x \in X$ è assegnata una famiglia di sottinsiemi $\mathcal{B}_x$ che verifica (1), (2), (3), allora esiste una topologia su X i cui aperti sono definiti dalla (0), per la quale $\mathcal{B}_x$ è una base di intorni per ogni $x \in X$.

Proposizione 2.2.12. *Sia X uno spazio topologico ed $x \in X$. Se $E \subset X$, allora*

1. *$x \in \overline{E}$ se e solo se $U \cap E \neq \emptyset$, per ogni $U \in \mathcal{U}_x$.*
2. *$x \in E^\circ$ se e solo se esiste un intorno $U \in \mathcal{U}_x$ tale che $U \subset E$.*

Dim. (1) Ogni punto dell'aperto $X - \overline{E}$ deve possedere un intorno che non interseca E. (2) Dalla 2.2.5(2) si ha che $x \notin \overline{E}$ implica $x \in (X - E)^\circ$, pertanto esiste $U \in \mathcal{U}_x$ tale che $U \subset X - E$, cioè $U \cap E = \emptyset$. □

Definizione 2.2.13. *Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e sia $A \subset X$. $x \in X$ è un* **punto di accumulazion***e per A se per ogni $U \in \mathcal{U}_x$ risulta $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.*
L'insieme dei punti di accumulazione per A si chiama il **derivato** *di A e si indica con A'. Si ha evidentemente $\overline{A} = A \cup A'$.*

Definizione 2.2.14. *Siano σ e τ due topologie definite sullo stesso insieme X. Si dice che τ è* **pi? fine** *di σ (e che σ è* **meno fine** *di τ), scritto $\sigma \leq \tau$ se $\sigma \subseteq \tau$.*

2.2.2 Spazi metrici.

Definizione 2.2.15. *Sia X un insieme. Una* **metrica** *su X è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfi le seguenti richieste:*

(d_1) *$d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, per ogni $x, y \in X$,*

(d_2) *$d(x, y) = d(y, x)$, per ogni $x, y \in X$,*

(d_3) *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $x, y, z \in X$,*

Uno **spazio metrico** *è una coppia (X, d), ove X è un insieme e d è una metrica su X.*

Definizione 2.2.16. *Sia (X, d) uno spazio metrico.*

- *Se $x \in X$, per ogni $\epsilon > 0$, l'insieme*

$$U_d(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$$

  si chiama il disco di centro x e raggio ϵ.

- *Un sottinsieme $E \subset X$ si dice aperto se per ogni $x \in E$ esiste $\epsilon > 0$ tale che $U_d(x, \epsilon) \subset E$.*

Si noti che :
• ogni disco $U_d(x, \epsilon)$ è aperto.
Infatti: per ogni $y \in U_d(x, \epsilon)$ esiste $\delta > 0$ tale che $d(x, y) < \epsilon - \delta$. Allora, per ogni $z \in U_d(y, \delta)$ si ha, in base alla disugualianza triangolare (d_3), $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \epsilon - \delta + \delta = \epsilon$, cos$\frac{1}{2}z \in U_d(x, \epsilon)$.

Proposizione 2.2.17. *Gli aperti appena definiti nello spazio metrico* (X, d) *costituiscono una topologia.*

Dim. Siano $A_1, \ldots, A_n \subset X$ aperti in (X, d) e sia $x \in \bigcap A_i$. Per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste un disco $U_d(x, \epsilon_i) \subset A_i$. Posto $\epsilon_i = min\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$, si ha che $U_d(x, \epsilon) \subset A_i$, ogni $i = 1, \ldots, n$. Cioè $U_d(x, \epsilon) \subset \bigcap A_i$. Quindi l'intersezione è aperta. Le altre proprietà di una topologia sono ovvie. □

Proposizione 2.2.18. *Se* (X, d) *è uno spazio metrico e* $x \in X$*, la famiglia dei dischi di centro* x *costituisce una base di intorni per la topologia indotta dalla metrica.*

Esempio 2.2.1. Per ogni $n > 0$, **la metrica usuale** su $\mathbb{R}^n$ è data dalla formula

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

per $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. La conseguente topologia è detta la **topologia usuale** su $\mathbb{R}^n$.
In particolare:

- per $n = 1$, un aperto di $\mathbb{R}$ è un sottinsieme A che, per ogni suo punto x, contiene un intervallo aperto $(x - \epsilon, x + \epsilon)$.

- per $n = 2$, un aperto di $\mathbb{R}^2$ è un sottinsieme A che, per ogni suo punto x, contiene un disco aperto (effettivo) centrato in x di raggio raggio $\epsilon > 0$.

- per $n = 3$, un aperto di $\mathbb{R}^3$ è un sottinsieme A che, per ogni suo punto x, contiene una sfera aperta centrata in x di raggio raggio $\epsilon > 0$.

Nota 2.2.19. • Uno spazio topologico si dice **metrizzabile** se la sua topologia è indotta da una metrica nel senso sopra detto. Tuttavia una stessa topologia può essere indotta da metriche distinte. C'è quindi una differenza tra i concetti di spazio metrico e spazio metrizzabile. Quello della metrizzabilità è un problema classico ed importante della Topologia Generale.

• Indicheremo con **Met** la categoria degli spazi metrici e loro funzioni continue. Talvolta, con abuso di linguaggio, si denota sempre con **Met** la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi metrizzabili.

2.2.3 Basi.

Definizione 2.2.20. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Una* **base** *per la topologia τ è una sottofamiglia $\mathcal{B} \subset \tau$ tale che ogni aperto di τ è unione di elementi di $\mathcal{B}$:*

$$\tau = \{ \bigcup_{B \,\in\, \mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \}.$$

In altre parole la topologia τ può essere ricostruita a partire da $\mathcal{B}$ prendendo tutte le unioni di sottofamiglie di $\mathcal{B}$. Allora $\mathcal{B}$ è una base per τ se e solo se per G aperto in X e $x \in G$, esiste qualche $B \subset \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset G$. Ad esempio :

• la collezione degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$ è una base per la topologia usuale.

• In ogni spazio metrico si ottiene una base considerando la famiglia di tutti i dischi aperti centrati in ciascun punto dello spazio.

Se $\mathcal{B}$ è una base per (X, τ), chiameremo i suoi elementi *aperti basici* di X.

Teorema 2.2.21. *Una collezione $\mathcal{B}$ di sottinsiemi è una base per una topologia su X se e solo se:*

(1) $X = \bigcup_{B \,\in\, \mathcal{B}} B$,

(2) *se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $x \in B_1 \cap B_2$, esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.*

Dim. Una implicazione è ovvia. Supponiamo che $\mathcal{B}$ verifichi le due proprietà e sia

$$\tau = \{ \bigcup_{B \,\in\, \mathcal{C}} B \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \}.$$

E' necessario verificare solo la chiusura di τ rispetto alle intersezioni. A tale scopo siano $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sottofamiglie di $\mathcal{B}$, allora $\bigcup_{B \in \mathcal{B}_1} B$ et $\bigcup_{C \in \mathcal{B}_2} C$ sono elementi di τ e si ha

$$(\bigcup_{B\in\mathcal{B}_1} B) \bigcap (\bigcup_{C\in\mathcal{B}_2} C) = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_1}\bigcup_{C\in\mathcal{B}_2}(B\cap C).$$

La proprietà (2) assicura che $B\cap C$ è a sua volta unione di elementi di $\mathcal{B}$, quindi l'asserto □

è anche di verifica immediata la seguente:

Proposizione 2.2.22. *$\mathcal{B}$ è una base per la topologia di X se e solo se la famiglia*

$$\mathcal{B}_x = \{B\in\mathcal{B} \mid x\in B\}$$

è una base di intorni per x.

Proposizione 2.2.23. *Sia $f: X\to Y$ una funzione continua di spazi topologici e sia $\mathcal{C}$ una base per la topologia di Y. Allora f è continua se e solo se $f^{-1}(C)$ è aperto in X, per ogni $C\in\mathcal{C}$.*

Dim. Se $V\subset Y$ è un aperto, allora esiste $\mathcal{C}'\subset\mathcal{C}$ tale che $V=\bigcup_{C\in\mathcal{C}'} C$. Allora

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(\bigcup_{C\,\in\,\mathcal{C}'} C) = \bigcup_{C\,\in\,\mathcal{C}'} f^{-1}(C),$$

pertanto $f^{-1}(V)$ è aperto in X. □

2.2.4 Generazione di topologie.

Sia X un insieme e sia $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottinsiemi di X. Denotiamo con $\tau(\mathcal{F})$ la famiglia di sottinsiemi di X che sono **unione di intersezioni finite** di insiemi in $\mathcal{F}$.

Proposizione 2.2.24. *$\tau(\mathcal{F})$ è una topologia su X.*

Dim. è evidente che $\emptyset, X\in\tau(\mathcal{F})$ e che $\tau(\mathcal{F})$ è chiusa rispetto alle unioni, per la sua stessa definizione. Si deve solo provare che $\tau(\mathcal{F})$ è chiusa rispetto alle intersezioni finite. Siano allora $A_1, A_2\in\tau(\mathcal{F})$, essendo,

$$A_1 = \bigcup_{k_1\in K_1}(\bigcap_{j\in J_{k_1}} F_j), \quad A_2 = \bigcup_{k\in K_2}(\bigcap_{j\in J_{k_2}} F_j)$$

ove J_{k_1}, J_{k_2} sono insiemi finiti e $F_j \in \mathcal{F}$. Si ha

$$A_1 \bigcap A_2 = (\bigcup_{k_1 \in K_1} (\bigcap_{j \in J_{k_1}} F_j)) \bigcap (\bigcup_{k \in K_2} (\bigcap_{j \in J_{k_2}} F_j)) =$$

$$= \bigcup_{k \in K_1 \cup K_2} (\bigcap_{j \in J_{k_1} \cup J_{k_2}} F_j),$$

e quindi l'asserto. □

Si dice che $\tau(\mathcal{F})$ è la **topologia generata da** $\mathcal{F}$ su X. Essa è la topologia meno fine su X rispetto alla quale gli elementi di $\mathcal{F}$ sono aperti. Si dice anche che $\mathcal{F}$ è una **sottobase** per la topologia $\tau(\mathcal{F})$. Allora:

$\mathcal{F}$ è una **sottobase** per la topologia di X se la collezione delle intersezioni finite di elementi di $\tau(\mathcal{F})$ costituisce una base per la topologia di X.

Proposizione 2.2.25. *Per una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici sono equivalenti:*

(1) *f è continua.*

(2) *$f^{-1}(F)$ è chiuso in X, per ogni F chiuso in Y.*

(3) *L'immagine inversa di un aperto sottobasico di Y è aperta in X.*

(4) *Per ogni $x \in X$ e per ogni $W \in \mathcal{U}_{f(x)}$ esiste $V \in \mathcal{U}_x$ tale che $f(V) \subset W$.*

(5) *$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, per ogni $A \subset X$.*

(6) *$\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$, per ogni $B \subset Y$.*

Dim.(1) $\Leftrightarrow$ (2) e (1) $\Leftrightarrow$ (3) sono evidenti.
(1) $\Rightarrow$ (4): poichè $f^{-1}(W) \in \mathcal{U}_x$, basta prendere $V = f^{-1}(W)$.
(4) $\Rightarrow$ (5): se $A \subset X$ e $x \in \overline{A}$, allora $V \cap A \neq \emptyset$, per ogni $V \in \mathcal{U}_x$. Se $W \in \mathcal{U}_{f(x)}$ e $V \in \mathcal{U}_x$ è tale che $f(V) \subset W$ si ha

$$\emptyset \neq f(V \cap A) \subset f(V) \cap f(A) \subset W \cap f(A),$$

quindi $f(x) \in \overline{f(A)}$.
(5) $\Rightarrow$ (6): posto $A = f^{-1}(B)$, allora

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{ff^{-1}(B)} = \overline{B \cap f(X)} \subset \overline{B}$$

da cui

$$\overline{f^{-1}(B)} = \overline{A} \subset ff^{-1}(\overline{A}) \subset f^{-1}(\overline{B}).$$

(6) $\Rightarrow$ (2): poichè F è chiuso per ipotesi si ha $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ e quindi l'ugualianza, cosicchè $f^{-1}(F)$ è chiuso. □

Proposizione 2.2.26. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua aperta e biiettiva, allora f è un omeomorfismo.*

Dim. Basta considerare che A è aperto in X se e solo se $f(A)$ è aperto in Y. Allora, considerata $f^{-1} : Y \to X$, segue che $f^{-1}(A)$ è aperto poichè $A = ff^{-1}(A)$. □

2.3 Limiti.

In questa sezione proveremo, tra le altre cose, che la categoria **Top** degli spazi topologici è completa e cocompleta.

2.3.1 Topologie iniziali.

Sia $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ una famiglia di funzioni, ove X è un insieme e $X_i = (X_i, \tau_i)$ è uno spazio topologico, per ogni $i \in I$. La **topologia iniziale (o debole)** τ su X, indotta da tale famiglia è la meno fine topologia che rende continue tutte le funzioni $f_i,\ i \in I$. Allora τ è la topologia su X generata dagli insiemi della forma $f_i^{-1}(U_i)$ con U_i aperto in X_i, per ogni $i \in I$.

Proposizione 2.3.1. *Se X ha la topologia iniziale indotta dalla famiglia $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ e Y è uno spazio topologico, una funzione $g : Y \to X$ è continua se solo se è continua $f_i \circ g$, per ogni $i \in I$.*

Dim.Una direzione è ovvia. Supponiamo che X abbia la topologia iniziale indotta dalle f_i e che ciascuna composizione $f_i \circ g$ sia continua. Allora, per ogni aperto $U_i \subset X_i$ deve essere

$$(f_i \circ g)^{-1}(U_i) = g^{-1}[f_i^{-1}(U_i)]$$

aperto in Y, quindi g è continua, poichè g^{-1} conserva le unioni e le intersezioni. $\square$

Se (X, τ) è uno spazio topologico e $Y \subset X$ è un sottospazio, allora la topologia relativa su Y è quella iniziale indotta dalla funzione di inclusione $e : Y \to X$. (In questo caso la famiglia $\{f_i\}$ si riduce alla sola funzione e)

Si noti che se X ha la topologia iniziale indotta dalla famiglia $\{f_i \mid i \in I\}$ e Y ha la topologia iniziale indotta dalla funzione continua $g : Y \to X$, allora Y ha la topologia iniziale indotta dalla famiglia $\{f_i \circ g \mid i \in I\}$.

2.3.2 Prodotti.

Sia $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici e sia

$$\prod_{i \in I} X_i = \{x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid x(i) \in X_i, \forall i \in I\}$$

il prodotto in **Set**. Se $x \in \prod_{i\in I} X_i$, posto $x_i = x(i)$, la $i-$**esima coordinata di** x, scriveremo $x = (x_i)_{i\in I}$. Si ha quindi

$$\pi_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i, \quad \pi_i(x) = x_i, \ \forall i \in I.$$

Nel caso $X_i = X, \ \forall i \in I$, allora

$$\prod_{i\in I} X_i = X^I = \{x : I \to X \mid tutte\}.$$

Poniamo su $\prod_{i\in I} X_i$ la topologia debole indotta dalla famiglia delle proiezioni $\{\pi_i \mid i \in I\}$. Tale topologia :

- è la cosiddetta **topologia prodotto o di Tychonoff** ed è quella che usualmente si considera su $\prod_{i\in I} X_i$,

- è la topologia generata dagli insiemi della forma $\pi_i^{-1}(U_i)$, per $U_i \subset X_i$ aperto, pertanto ha per aperti i sottinsiemi che sono unioni di intersezioni finite del tipo
$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$
con $U_{i_k} \subset X_{i_k}$ aperto.

Proposizione 2.3.2. *Gli aperti della topologia di Tychonoff su $\prod_{i\in I} X_i$ sono gli insiemi del tipo $\prod_{i\in I} U_i$, ove :*

- *$U_i \subset X_i$ è aperto,*
- *$U_i = X_i$, per quasi tutti gli $i \in I$.*

Dim. Esercizio. □

Si noti che nel caso di un prodotto finito, ad esempio $X \prod Y = X \times Y$, gli aperti sono della forma $U \times V$, con $U \subset X$ e $V \subset Y$ aperti.

Teorema 2.3.3. *$\prod_{i\in I} X_i$ con la topologia di Tychonoff è il prodotto in* **Top** *della famiglia $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ di spazi topologici. Pertanto la categoria* **Top** *è dotata di prodotti.*

Dim. Se $\{f_i : Z \to X_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di funzioni continue, allora per la proprietà universale del prodotto in **Set** esiste un'unica funzione $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X_i \\ Z \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f"] & \prod_{i\in I} X_i \arrow[u, "\pi_i"'] \end{tikzcd}$$

Poichè $\pi_i \circ f = f_i$ è continua, per ogni $i \in I$, dalla Prop.1.1 segue che f è continua. □

Ricordiamo che una funzione continua $g : X \to Y$ si dice **aperta** (risp. **chiusa**) se porta insiemi aperti (risp. chiusi) di X in insiemi aperti (risp. chiusi) di Y.

Proposizione 2.3.4. *Le proiezioni π_i, $i \in I$, del prodotto sono funzioni continue aperte ma non chiuse.*

Dim. Sia $\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$, un aperto basico di $\prod_{i\in I} X_i$. Allora si ha

$$\pi_j[\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})] = \emptyset, \text{ se } j \neq i_1, \dots i_n,$$

$$\pi_j[\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})] = U_{i_r}, \text{ se } j = i_r.$$

In $\mathbb{R}^2$ si consideri l'insieme

$$A = \{(x, y) \mid xy - 1 = 0\}.$$

A è chiuso ma $\pi_1(A) = \{x \mid x \neq 0\}$ non lo è. □

2.3.3 Egualizzatori.

Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue tra spazi topologici e sia (E, e) il loro egualizzatore in **Set**. consideriamo E con la topologia di sottospazio di X, cosicchè $e : E \to X$ è continua:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ & S \arrow[ul, "t"] \arrow[u, "s"'] & \end{tikzcd}$$

se $s : S \to X$ è una funzione continua tale che $f \circ s = g \circ s$. Per la proprietà universale dell'egualizzatore in **Set** esiste un'unica funzione t tale che $e \circ t = s$. Ancora dalla Prop.1.1 segue che t è continua.
Allora **Top** è dotata di egualizzatori.

Teorema 2.3.5. **Top** *è completa.*

Dim. La completezza deriva dal Teorema di completezza. Va notato che i pull-back in **Top** si ottengono, come in **Set**, da prodotti ed egualizzatori. $\square$

Definizione 2.3.6.

(1) *Una famiglia di funzioni* $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ **separa i punti** *di* X *se, dati* $x \neq y$ *in* X*, esiste un indice* $i \in I$ *per cui* $f_i(x) \neq f_i(y)$.

(2) *Una famiglia di funzioni* $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ **separa i punti dai chiusi** *di* X *se, dati* $x \in X$, $F \subset X$ *chiuso non contenente* x *esiste un indice* $i \in I$ *per cui* $f_i(x) \notin \overline{f_i(F)}$.

Proposizione 2.3.7. *Siano* $X = (X, \tau)$, $X_i = (X_i, \tau_i)$ *spazi topologici, per ogni* $i \in I$ *e sia* $\{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ *una famiglia di funzioni continue. Sono equivalenti :*

- *la famiglia* $\{f_i \mid i \in I\}$ *separa i punti di* X *e* τ *è la topologia iniziale da essa indotta,*

- *l'unica funzione continua* $e : X \to \prod_{i \in I} X_i$ *indotta dalla proprietà universale del prodotto è una immersione.* e *si chiama funzione continua di valutazione.*

Dim. Supponiamo che e sia una immersione, allora $e(X)$ è un sottospazio del prodotto e ha quindi la topologia iniziale indotta dalla famiglia $\{\pi_{i|e(X)} \mid i \in I\}$. Segue che X ha la topologia iniziale indotta da $\{\pi_i \circ e = f_i \mid i \in I\}$. Se poi $x \neq y$ in X, allora $e(x) \neq e(y)$, pertanto esiste un indice $i \in I$ tale che$\pi_i(e(x)) \neq \pi_i(e(y))$, cioè $f_i(x) \neq f_i(y)$.
Viceversa, se $\{f_i \mid i \in I\}$ separa i punti di X allora, se $x \neq y$ in X è $f_i(x) = \pi_i(e(x)) \neq f_i(y) = \pi_i(e(y))$, quindi $e(x) \neq e(y)$ ed e è iniettiva. Se poi $U \subset X$ è

un aperto, poichè X ha la topologia iniziale indotta dalle f_i, possiamo supporre che $U = f_i^{-1}(V)$, p. q. $V \subset X_i$ aperto. Allora:

$$U = f_i^{-1}(V) = [\pi_{i|e(X)} \circ e]^{-1}(V) = e^{-1}[\pi_{i|e(X)}^{-1}(V)],$$

da cui si ricava

$$e(U) = \pi_{i|e(X)}^{-1}(V) = \pi_i{}^{-1}(V) \cap e(X),$$

cosicchè $e(U)$ è aperto in $e(X)$. Infine X ha la topologia iniziale indotta da e, cioè è una immersione. $\square$

2.4 Colimiti.

2.4.1 Topologie finali.

Sia $\{f_i : X_i \to X \mid i \in I\}$ una famiglia di funzioni, ove X è un insieme e $X_i = (X_i, \tau_i)$ è uno spazio topologico, per ogni $i \in I$. La **topologia finale (o forte)** τ su X, indotta da tale famiglia, è la pi? fine topologia che rende continue tutte le funzioni f_i, $i \in I$. In questo caso un insieme $U \subset X$ è un aperto se e solo se $f_i^{-1}(U)$ è aperto in X_i, per ogni $i \in I$.

Proposizione 2.4.1. *Se X ha la topologia finale indotta dalla famiglia*

$$\{f_i : X_i \to X \mid i \in I\}$$

e Y è uno spazio topologico, una funzione $g : X \to Y$ è continua se solo se è continua $g \circ f_i$ per ogni $i \in I$.

Dim. Una direzione è ovvia. Supponiamo che X abbia la topologia finale indotta dalle f_i e che ciascuna composizione $g \circ f_i$ sia continua. Allora, per ogni aperto $V \subset Y$ deve essere

$$(g \circ f_i)^{-1}(V) = f_i^{-1}(g^{-1}(V))$$

aperto in X_i, per ogni $i \in I$, pertanto $g^{-1}(V)$ deve essere aperto in X e quindi g è continua. □

Se $g : X \to Y$ è una funzione continua suriettiva ed Y ha la topologia finale τ_g indotta da g, allora si dice che Y è uno **spazio quoziente** di X e la topologia di Y si chiama anche **topologia quoziente**. Si ha

$$\tau_g = \{G \subset Y \mid g^{-1}(G) \text{ aperto in } X\}.$$

Proposizione 2.4.2. *Siano $g : X \to Y$, $h : Y \to Z$ due funzioni continue.*

- *se g e h sono funzioni quoziente, tale è pure $h \circ g$,*
- *se $h \circ g$ è una funzione quoziente, allora h è funzione quaziente.*

Proposizione 2.4.3. *Se $g : X \to Y$ è una funzione continua suriettiva aperta oppure chiusa, allora è una funzione continua quoziente.*

Dim. Se τ è la topologia di Y e τ_g è la topologia quoziente, allora $\tau \leq \tau_g$. Sia $U \in \tau_g$. Si ha $g^{-1}(U)$ aperto in X, ma $U = g(g^{-1}(U))$ è aperto in Y, cioè $U \in \tau$. $\square$

Esempio 2.4.1. Consideriamo l'intervallo $I = [0, 2\pi]$ come sottospazio di $\mathbb{R}$, con la topologia usuale e sia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ la circonferenza unitaria, anch'essa come sottospazio di $\mathbb{R}^2$, con la topologia usuale. La funzione $f : I \to S^1$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$, è continua e chiusa. Allora S^1 è uno spazio quoziente di I.

2.4.2 Coprodotti.

Sia $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in I\}$ una famiglia di spazi topologici e sia

$$\coprod_{i\in I} X_i, \quad \nu_i : X_i \to \coprod_{i\in I} X_i, \ \forall i \in I,$$

il coprodotto in **Set**. Poniamo su $\coprod_{i\in I} X_i$ la topologia finale indotta dalla famiglia delle iniezioni $\{\nu_i \mid i \in I\}$. Se $\{f_i : X_i \to X \mid i \in I\}$ è una famiglia di funzioni continue, allora esiste un'unica funzione $h : \coprod_{i\in I} X_i \to X$ tale che

$$\begin{tikzcd}
 & X_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, "\nu_i"] \\
X & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[l, "h"']
\end{tikzcd}$$

commuta per ogni $i \in I$. In base alla Pro.2.1 h è continua. Allora **Top** è dotata di coprodotti.

Notiamo che nel caso in cui $\coprod_{i\in I} X_i$ sia effettivamente una unione disgiunta e le ν_i sono le inclusioni, allora $U \subset \coprod_{i\in I} X_i$ è aperto se e solo se $U \cap X_i$ è aperto, per ogni $i \in I$.

2.4.3 Coegualizzatori.

Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue tra spazi topologici e sia (Q, q) il loro coegua-lizzatore in **Set**. Consideriamo Q con la topologia quoziente indotta da q:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "s"'] & & Q \arrow[dl, "t"] \\ & & S & \end{tikzcd}$$

se $s : S \to X$ è una funzione continua tale che $s \circ f = s \circ g$, per la proprietà universale del coegualizzatore in **Set** esiste un'unica funzione t tale che $t \circ q = s$. Ancora dalla Prop.2.1 segue che t è continua. Allora **Top** è dotata di coegualizzatori.

Teorema 2.4.4. **Top** *è cocompleta.*

Dim. La cocompletezza deriva dal Teorema di completezza duale. Va notato che i push-out in **Top** si ottengono, come in **Set**, da coprodotti e coegualizzatori. □

2.5 Decomposizioni.

Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico e sia $\mathcal{D}$ una partizione o **decomposizione** di X. Sia poi $P : X \to \mathcal{D}$ la funzione suriettiva ove $P(x)$ è l'unico elemento di $\mathcal{D}$ che contiene $x \in X$. Dotiamo $\mathcal{D}$ della topologia quoziente indotta da P. Tale topologia risulta cos$\frac{1}{2}$definita: $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ è aperto se e solo se $\bigcup\{F \mid F \in \mathcal{F}\}$ è aperto in X.

$\mathcal{D}$ si chiama **lo spazio di decomposizione** di X e P è **la funzione di decomposizione**.

Teorema 2.5.1. *Sia $f : X \to Y$ una funzione quoziente. Sia $\mathcal{D}$ la decomposizione i cui elementi sono gli insiemi del tipo $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Esiste un omeomorfismo $h : Y \to \mathcal{D}$ che commuta il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "P"] & \\ Y \arrow[rr, "h"] & & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

Dim. è chiaro che $f^{-1}(y) = f^{-1}(z)$ se esolo se $y = z$. Definiamo allora $h : Y \to \mathcal{D}$ ponendo $h(y) = f^{-1}(y)$, per ogni $y \in Y$. Allora il diagramma è certamente commutativo in **Set**. Da $h \circ f = P$ si ricava che h è continua poichè P è continua ed f è una funzione continua quoziente. Inoltre h è suriettiva poichè tale è P. h è iniettiva perchè da $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$ segue $y = f(f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y')) = y'$. L'inversa di h è la funzione $g : \mathcal{D} \to Y$, $g(f^{-1}(y)) = y$, che è continua poichè $g \circ P = f$. $\square$

Possiamo commentare quanto sopra affermando che: **ogni spazio di decomposizione è uno spazio quoziente e, viceversa, ogni spazio quoziente è (isomorfo a) uno spazio di decomposizione.**

Naturalmente ogni decomposizione $\mathcal{D}$ definisce una relazione di equivalenza su X, e viceversa. Se R è una relazione di equivalenza su X, allora la decomposizione di X indotta da R è l'insieme X/R. Si dice **spazio di identificazione** di X lo spazio di decomposizione $\mathcal{D} = X/R$ e la funzione continua di decomposizione $P : X \to X/R$ si dice la **funzione di identificazione.** Possiamo considerare i seguenti casi:

- Dato uno spazio topologico X, identificare i suoi punti x ed x' significa considerare lo spazio quoziente ottenuto dalla relazione di equivalenza su X che tale che $x \sim x'$ e che lascia equivalenti solo a se stessi tutti gli altri punti. In generale, se A è un sottospazio di X, si possono identificare tutti i punti di A ad un solo punto, ponendo cioè $x \sim y \Leftrightarrow x, y \in A$, lasciando equivalenti solo a se stessi tutti gli altri punti. Lo spazio quoziente ottenuto si denota X/A. Ad es., la $2-$sfera, cioè la sfera di $\mathbb{R}^3$ si ottiene dal cercio/disco $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, identificando ad un singolo punto il bordo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

* * *

La $n-$sfera $S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_1^n x_i^2 < 1\}$ è il bordo della $(n+1)-$palla/boccia $D^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_1^n x_i^2 \leq 1\}$.

- Siano X ed Y due spazi topologici con $X \cap Y = \emptyset$. Se $A \subset X$ è un chiuso ed $f : A \to Y$ è continua, si consideri il push-out

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "q_X"] \\ Y \arrow[r, "q_Y"] & X \coprod_f Y \end{tikzcd}$$

che (Teor. 2.3) si ottiene dal coprodotto (unione disgiunta)

$$Y \xrightarrow{in_Y} X \coprod Y \xleftarrow{in_X} X$$

come coegualizzatore

$$X \underset{in_Y \circ a}{\overset{in_X \circ f}{\rightrightarrows}} X \coprod Y \xrightarrow{q} X \coprod_f Y \quad .$$

Allora $X \coprod_f Y$ è il quoziente di $X \coprod Y$ rispetto alla relazione $x \sim f(x)$ per ogni $x \in A$. In questo caso si parla di **incollamento** di X ad Y tramite la **funzione di incollamento** f.

Proposizione 2.5.2. *La funzione continua quoziente* $q : X \coprod Y \to X \coprod_f Y$ *ha le seguenti proprietà :*

(1) $q_{|Y}$ *è un omeomorfismo su* $q(Y)$ *e* $q(Y)$ *è chiuso in* $X \coprod_f Y$*,*

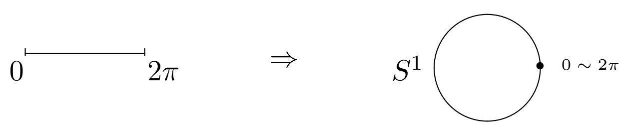
(2) $q_{|X-A}$ *è un omeomorfismo su* $q(X-A)$ *e* $q(X-A)$ *è aperto in* $X \coprod_f Y$*,*

Dim. (1): $q_{|Y}$ è continua ed iniettiva. Sia $F \subset Y$ un chiuso, allora F è chiuso in $X \coprod Y$ e si ha $F = q^{-1}(q(F))$. Poichè q è funzione continua quoziente, segue che $q(F)$ è chiuso in $X \coprod_f Y$ e quindi in $q(Y)$.
(2): tale affermazione si può dimostrare esattamente come la precedente, oppure osservando che lo spazio $X \coprod_f Y$ ha come insieme sostegno l'insieme $(X - A) \cup Y$. □

2.5.1 Esempi.

• La circonferenza S^1 si ottiene come spazio quoziente dell'intervallo $[0, \pi]$ rispetto alla relazione indotta dalla decomposizione

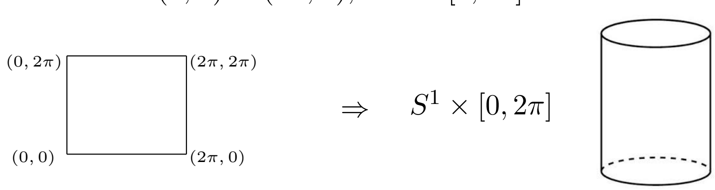
$$\mathcal{D} = \{\{x\} \mid 0 < x < 2\pi\} \cup \{0, 2\pi\}.$$



• Il cilindro $S^1 \times [0, 2\pi]$ si ottiene come spazio quoziente del rettangolo

$$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$$

rispetto alla relazione $(0, x) \sim (2\pi, x),\ \forall\, x \in [0, 2\pi]$.

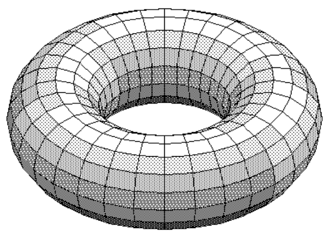


$S^1 \times [0, 2\pi] = ([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])/ \sim$

• Il toro T è la superficie che si ottiene dal cilindro sopra identificando le due circonferenze di bordo, cioè

$$T = (S^1 \times [0, 2\pi])/ \sim$$

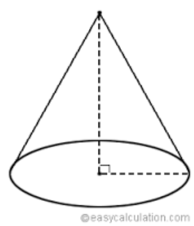
ove $(x, 0) \sim (x, 2\pi),\ \forall\, x \in [0, 2\pi]$.



Sia X uno spazio topologico e consideriamo il prodotto $X \times [0, 1]$.

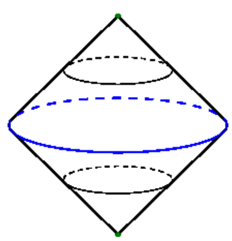
• il **cono** su X è lo spazio quoziente

$$\Lambda X = (X \times [0, 1])/ \sim, \quad (x, 1) \sim (y, 1), \quad \forall\, x, y \in X.$$



• la **sospensione** di X è lo spazio quoziente

$$\Sigma X = (X \times [1, -1])/ \sim, \quad (x, 1) \sim (y, 1) \text{ e } (x, -1) \sim (x, -1), \quad \forall\, x, y \in X.$$



2.6 Fattorizzazioni.

Proposizione 2.6.1. *Nella categoria* **Top**

(1) *i monoestremali sono le immersioni topologiche,*

(2) *gli epiestremali sono le funzioni quoziente.*

Dim.
(1) Sia $f : X \to Y$ un'immersione e sia $f = m \circ e$ una fattorizzazione con e un epimorfismo. Si consideri il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "e"'] \arrow[dr, "f"] & f[X] \arrow[d, "i"] \\ Z \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

con l'ovvio significato dei simboli. Definiamo $g : Z \to f[X]$ ponendo $g(z) = m(z)$. Tale definizione è ben posta poichè, essendo e suriettiva si ha $m(Z) \subset f[X]$. Allora $m = i \circ g$ ed anche $i \circ g \circ e = m \circ e = i \circ f'$, da cui $g \circ e = f'$. Poichè f' è un omeomorfismo si ha $({f'}^{-1} \circ g) \circ e = id$. Allora e è un omeomorfismo, essendo un epimorfismo invertibile a sinistra.
Viceversa, se $f : X \to Y$ è un monoestremale, considerata la sua fattorizzazione

$$X \xrightarrow{f'} f[X] \xrightarrow{i} Y$$

segue subito che f' è un omeomorfismo.
(2) Sia $f : X \to Y$ una funzione quoziente ed sia $f = m \circ e$ una sua fattorizzazione con m un monomorfismo. Allora anche m è un quoziente (2.4.2), infine un omeomorfismo.
Viceversa, se $f : X \to Y$ è un epiestremale, consideriamo la fattorizzazione

$$X \xrightarrow{q} X/_{\sim} \xrightarrow{\overline{f}} Y$$

ove $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ e $\overline{f}([x)] = f(x)$. Poichè $\overline{f}$ è iniettiva, segue che essa un omeomorfismo. $\square$

Proposizione 2.6.2. *La categoria* **Top** *ammette fattorizzazioni* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *ove*

(1) $\mathcal{E} =$ *epimorfismi,* $\mathcal{M} =$ *immersioni topologiche,*

(2) $\mathcal{E} =$ *funzioni quoziente,* $\mathcal{M} =$ *monomorfismi.*

Dim. Le fattorizzazioni indicate sono, rispettivamente, quelle costruite nella dimostrazione della Proposizione 2.6.1. Per concludere la dimostrazione si coinsiderino (1.1.4) e (2.4.2) $\square$

2.7 Convergenza in uno spazio topologico.

Definizioni 2.7.1.

(1) *Un* **insieme diretto** *è un preordine (1.1.2(6))* $(\Lambda, \leq)$ *con la proprietà che:*
per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ *esiste* $\lambda \in \Lambda$ *con* $\lambda_1, \lambda_2 \leq \lambda$.

(2) *una* **rete** *(net) in un insieme* X *è una funzione* $\phi : \Lambda \to X,\ \lambda \mapsto x_\lambda$. *Scriveremo* $\phi = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

(3) *Se* $(M, \leq)$ *è un altro insieme diretto, una funzione monotona e cofinale* $\gamma : M \to \Lambda$ *è una funzione tale che:*

- $\mu_1 \leq \mu_2 \ \Rightarrow \gamma(\mu_1) \leq \gamma(\mu_2)$,
- $\forall\ \lambda \in \Lambda\ \exists\ \mu \in M$ *con* $\lambda \leq \gamma(\mu)$.

(4) *La composizione* $\phi \circ \gamma : M \to X$ *è una rete in* X *denotata* $(x_{\lambda_\mu})_{\mu\, \in\, M}$ *che si chiama la* **sottorete** *di* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *definita da* γ.

(5) *Sia* X *uno spazio topologico e* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *una rete in* X. *Si dice che la rete converge ad* $x \in X$, *o che* x *è un limite della rete, scritto* $x_\lambda \to x$ *se*

$$\forall\ U \in \mathcal{U}_x,\ \exists\ \lambda_U \in \Lambda \quad \textit{tale che} \quad x_\lambda \in U,\ \forall\ \lambda \geq \lambda_U.$$

L'insieme degli elementi x_λ *della rete, per* $\lambda \geq \lambda_0$, *costituiscono la coda della rete definita da* λ_0.

(6) *Un* **punto di accumulazione** *per* $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *è un punto* $x \in X$ *tale che:*

$$\forall\ U \in \mathcal{U}_x,\ \forall\ \lambda_0 \in \Lambda,\ \exists\ \lambda \geq \lambda_0 \quad \textit{con} \quad x_\lambda \in U.$$

Proposizione 2.7.2. *Sia* $E \subset X$ *e sia* (x_λ) *una rete in* E. *Se* $x_\lambda \to x$, *allora* $x \in \overline{E}$.

Dim. Ogni intorno di x interseca E in una coda di (x_λ), pertanto l'asserto

□

Teorema 2.7.3. *Se $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ è una rete in X allora l'insieme dei punti di accumulazione di $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ coincide con l'insieme dei limiti delle sottoreti convergenti di $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.*

Dim. Sia $y \in X$. Se esiste una sottorete che converge ad y allora y è evidentemente un punto di accumulazione per la rete. Viceversa: sia y un punto di accumulazione per di $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Si consideri l'insieme

$$\Gamma = \{(\lambda, U) \mid U \in \mathcal{U}_y,\ x_\lambda \in U\}$$

diretto dalla relazione

$$(\lambda_1, U_1) \le (\lambda_2, U_2) \ \Leftrightarrow\ \lambda_1 \le \lambda_2,\ U_2 \subset U_1.$$

Allora la funzione $h : \Gamma \to \Lambda,\ h(\lambda, U) = \lambda$ è cofinale e la sottorete da essa definita converge ad y. Infatti: siano $U_0 \in \mathcal{U}_y$ e $\lambda_0 \in \Lambda$ con $x_{\lambda_0} \in U_0$. Allora $(\lambda_0, U_0) \in \Gamma$ ed poi $(\lambda, U) \ge (\lambda_0, U_0)$ implica $U \subset U_0$, cos$\frac{1}{2}$ $x_\lambda \in U_0$, per $\lambda \ge \lambda_0$. $\square$

Teorema 2.7.4. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua e sia $x_\lambda \to x$ in X. Allora si ha $f(x_\lambda) \to f(x)$ in Y.*

Dim. Sia $V \in \mathcal{U}_{f(x)}$, allora $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_x$, quindi esiste $\lambda_0 \in \Lambda$ tale che $x_\lambda \in f^{-1}(V)$, per ogni $\lambda \ge \lambda_0$, segue $f(x_\lambda) \in V$, per ogni $\lambda \ge \lambda_0$. $\square$

Teorema 2.7.5. *Una rete $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in un prodotto $\prod_{i\in I} X_i$ converge ad x se e solo se $\pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x)$ in X_i, per ogni $i \in I$.*

Dim. Una implicazione segue subito dal teorema precedente. Supponiamo che $\pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x)$ in X_i, per ogni $i \in I$. Un intorno basico di x nel prodotto è della forma

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}).$$

Si ha che, per ogni $k = 1, \ldots, n$, esiste $\lambda_{i_k} \in \Lambda$ tale che $\pi_{i_k}(x_\lambda) \in U_{i_k}$. Posto allora $\lambda_0 = max\{\lambda_{i_k} \mid k = 1, \ldots, n\}$, segue che, per ogni $\lambda \ge \lambda_0$,

$$x_\lambda \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}).$$

□

2.8 Assiomi di Separazione.

2.8.1 La categoria $\mathbf{Top_0}$.

Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Diremo che X è uno spazio T_0 se verifica il seguente assioma:

$\mathbf{T_0}$: *per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esiste $V \in \tau$ tale che $x \in V$ et $y \notin V$.*

Denoteremo con $\mathbf{Top_0}$ la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi T_0.

2.8.2 Proprietà generali.

(1) è chiusa rispetto ai sottospazi, cioè: un sottospazio di uno spazio T_0 è ancora T_0.

(2) è chiusa rispetto ai prodotti: se $\prod_{i \in I} X_i$ è il prodotto di una famiglia di spazi T_0, anch'esso è uno spazio T_0.
Infatti, se $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$ sono due punti distinti, allora per un certo indice $i \in I$ deve essere $x_i \neq y_i$, quindi esiste in X_i un aperto V_i contenente x_i e non y_i. Allora $\pi_i^{-1}(V_i)$ è un aperto del prodotto che contiene x e non y.

(3) è chiusa rispetto ai coprodotti.

(4) Non è chiusa rispetto ai quozienti, cioè un quoziente di uno spazio T_0 non è necessariamente T_0.

(5) L'immagine continua di uno spazio T_0 non è necessariamente T_0.
Si consideri, ad esempio, $X = \{x, y\}$ con le topologie $\tau = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$ e $\sigma = \{\emptyset, \{x, y\}\}$. La funzione identica di (X, τ) in (X, σ) è continua, ma mentre (X, τ) è T_0, (X, σ) non lo è.

2.8.3 Identificazione T_0 .

Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico arbitrario. Poniamo in X la seguente relazione di equivalenza

$$x \sim y \;\Leftrightarrow \overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}, \quad \forall\, x, y \in X,$$

cioè tutti gli intorni di x contengono y, e viceversa.

Sia $T_0(X) = X/\sim$ lo spazio quoziente dotato della funzione quoziente $q_X : X \to T_0(X)$.

- *$T_0(X)$ è uno spazio T_0.*

Infatti: se $[x] \neq [y]$, allora esiste un intorno di uno dei due punti che non contiene l'altro. Ad esempio esiste $U \in \mathcal{U}_x$ tale che $y \notin U$. Allora $[x] \in q_X(U)$ e $[y] \notin q_X(U)$, essendo $q_X(U)$ un intorno aperto di $[x]$ poichè $x \in U \subset q_X^{-1} q_X(U)$.

- Sia $X \in$ **Top** e sia $f : X \to Y$ una funzione continua con $Y \in \mathbf{Top_0}$.

C'è un triangolo commutativo in **Set**

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q_X"] \arrow[dr, "f"'] & T_0(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

ove $\tilde{f}[x] = f(x), \;\; \forall x \in X$. Se tale funzione è ben definita essa è automaticamente continua ed è l'unica che rende commutativo il diagramma. Proviamo che

$$\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Se fosse $f(x) \neq f(y)$, allora esisterebbe un aperto U di Y contenente $f(x)$ e non $f(y)$. Quindi $x \in f^{-1}(U)$ et $y \notin f^{-1}(U)$, cosÏ $x \notin \overline{\{y\}}$.
Sia ora $f : X \to Y$ una funzione continua qualunque. Per quanto sopra esiste un diagramma commutativo un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "f"'] & T_0(X) \arrow[d, "T_0(f)"] \\
Y \arrow[r, "q_Y"] & T_0(Y)
\end{tikzcd}$$

ove $T_0(f)[x] = [f(x)], \ \forall x \in X$. Si è ottenuto un funtore $T_0 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top_0}$ detto **identificazione** T_0**.** Questo ha la proprietà che, per ogni $X \in \mathbf{Top}$ ed $Y \in \mathbf{Top_0}$, c'è una biiezione

$$\mathbf{Top_0}(T_0(X), Y) \cong \mathbf{Top}(X, E(Y)),$$

cioè:

Proposizione 2.8.1. *L'identificazione T_0 è aggiunto a sinistra del funtore di immersione $E : \mathbf{Top_0} \to \mathbf{Top}$.*

Esempio 2.8.1. Una **pseudo metrica** su un insieme X è una funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

che soddisfa le seguenti richieste:

(1) $d(x, x) = 0$ per ogni $x \in X$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, per ogni $x, y \in X$,

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, per ogni $x, y, z \in X$,

Uno spazio pseudometrizzabile è uno spazio la cui topologia è indotta da una pseudometrica. Se si pone in X la relazione di equivalenza $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ si ottiene su $X/\sim$ una metrica definendo $d^*([x], [y]) = d(x, y)$. Lo spazio topologico che si ottiene è l'identificazione T_0 dello spazio di partenza [Esercizio]. Sia **PsMet** la categoria degli spazi pseudometrici e loro funzioni continue. Con la costruzione precedente si ottiene un un funtore $T_0 : \mathbf{PsMet} \to \mathbf{Met}$, aggiunto a sinistra dell'inclusione $E : \mathbf{Met} \to \mathbf{PsMet}$.

2.8.4 La categoria $\mathbf{Top_1}$.

Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Diremo che X è uno spazio T_1 se verifica il seguente assioma:

$\mathbf{T_1}$: *per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ sono* **separati***, cioè esistono intorni $U \in \mathcal{U}_x$ e $V \in \mathcal{U}_y$ tali che $x \notin V$ et $y \notin U$.*

Denoteremo con $\mathbf{Top_1}$ la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi T_1.
Si ha:

$$T_1 \Rightarrow T_0, \quad \text{cioè} \quad \mathbf{Top_1} \subset \mathbf{Top_0},$$

ma $T_0 \not\Rightarrow T_1$. Ad esempio, $X = \{x, y\}$ con la topologia $\tau = \{\emptyset, \{x\}, X\}$ è T_0 ma non T_1.

Teorema 2.8.2. *Per uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ sono equivalenti:*

(1) *X è T_1,*

(2) *punti di X sono chiusi,*

(3) *ogni sottinsieme di X è intersezione di tutti gli aperti che lo contengono.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2): se X è T_1 allora $X - \{x\}$ è aperto poichè, per ogni $y \in X - \{x\}$ esiste intorno di y non contenente x, cioè contenuto in $X - \{x\}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): sia $A \subset X$, allora

$$A = \bigcap_{x \notin A} (X - \{x\}).$$

(3) $\Rightarrow$ (1): ogni $x \in X$ è intersezione di tutti i suoi intorni aperti, pertanto se $x \neq y$ deve esistere un intorno aperto di x che non contiene y e simmetricamente per y. □

2.8.5 Proprietà generali .

(1) è chiusa rispetto ai sottospazi, cioè: un sottospazio di uno spazio T_1 è ancora T_1,

(2) è chiusa rispetto ai prodotti: se $\prod_{i \in I} X_i$ è il prodotto di una famiglia di spazi T_1, anch'esso è uno spazio T_1.
Infatti, se $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$ sono due punti distinti, allora per un certo indice $i \in I$ deve essere $x_i \neq y_i$, quindi esistono in X_i un aperto U_i contenente x_i e un aperto V_i contenente y_i, tali che $x_i \notin V_i$, $y_i \notin U_i$. Allora $\pi^{-1}(U_i)$ e $\pi^{-1}(V_i)$ sono aperti del prodotto che contengono x e non y, rispettivamente, ma non viceversa.

(3) è chiusa rispetto ai coprodotti.

(4) Non è chiusa rispetto ai quozienti, cioè un quoziente di uno spazio T_1 non è necessariamente T_1.
Infatti, un quoziente di uno spazio $X \in \mathbf{Top_1}$ è T_1 se e solo se gli elementi della decomposizione associata sono chiusi in X.

(5) L'immagine continua di uno spazio T_1 non è necessariamente T_1.

2.8.6 Identificazione T_1 .

Due punti di uno spazio topologico $x, y \in X$ sono **topologicamente indistinguibili** se essi hanno esattamente gli stessi intorni cioè, $\mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y$. X è uno spazio R_0, o anche uno **spazio simmetrico**, se ogni coppia di punti topologicamente distinguibili sono separati.

Proposizione 2.8.3. *Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti condizioni:*

(1) X è uno spazio T_1.

(2) X è uno spazio R_0 ed uno spazio T_0.

Dim. E' chiaro che (1) $\Rightarrow$ (2). Per il viceversa: siano $x, y \in X$ due punti distinti. Allora per T_0 essi sono topologicamente distinguibili, quindi separati per R_0. □

Dato uno spazio topologico X, si consideri la relazione di equivalenza

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{U}_x = \mathcal{U}_y.$$

Il quoziente $R_0(X)$ rispetto a tale relazione si dice **simmetrizzazione** di X. Denotiamo **Sym** la categoria degli spazi simmetrici. $R_0 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Sym}$ è un funtore aggiunto a sinistra dell'immersione $\mathbf{Sym} \subset \mathbf{Top}$. Infatti: siano $X \in \mathbf{Top}$, $S \in \mathbf{Sym}$ e $f : X \to S$ una funzione continua. Se $x, y \in X$ sono tali che $f(x) \neq f(y)$, esiste in S un intorno U di $f(x)$ che non contiene $f(y)$, allora $f^{-1}(U)$ è un intorno di x che non contiene y, cos$\frac{1}{2}[x] \neq [y]$. Si può quindi definire $\tilde{f} : R_0(X) \to S$ ponendo $\tilde{f}([x]) = f(x)$ e questa è l'unica funzione continua che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r_X"] \arrow[dr, "f"'] & R_0(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& S
\end{tikzcd}$$

essendo $r_X : X \to R_0(X)$ la funzione quoziente.
Componendo tale funzione quoziente con l'identificazione T_0 di $R_0(X)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "r_X"] & R_0(X) \arrow[r, "q_{R_0(X)}"] & T_0R_0(X)
\end{tikzcd}$$

si ottiene l'**identificazione** T_1 **di** X**.** Si definisce cos$\frac{1}{2}$ un funtore $T_1 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top_1}$, aggiunto a sinistra dell'inclusione $E : \mathbf{Top_1} \to \mathbf{Top}$, quindi anche $\mathbf{Top_1}$ è una sottocategoria riflessiva di **Top**.

2.8.7 Spazi di Hausdorff. $\mathbf{Top_2}$.

Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico. Diremo che X è uno spazio T_2 oppure uno **spazio di Hausdorff**, se verifica il seguente assioma:

$\mathbf{T_2}$: *per ogni coppia di punti distinti* $x, y \in X$ *esistono aperti disgiunti* U, V *tali che* $x \in U$ *et* $y \in V$.
Si dice che U *e* V *separano* x *ed* y.

Denoteremo con $\mathbf{Top_2}$ la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi T_2. Si ha:

$$T_2 \Rightarrow T_1, \quad \text{cioè} \quad \mathbf{Top_2} \subset \mathbf{Top_1},$$

ma $T_1 \not\Rightarrow T_2$. Ad esempio, sia X un insieme infinito con *la topologia cofinita*, cioè la topologia in cui i chiusi sono i sottinsiemi finiti. Allora X è T_1, poichè i punti sono chiusi, ma non T_2.

2.8.8 Proprietà generali.

(1) è chiusa rispetto ai sottospazi, cioè: un sottospazio di uno spazio T_2 è ancora T_2.

(2) è chiusa rispetto ai prodotti: se $\prod_{i\in I} X_i$ è il prodotto di una famiglia di spazi T_2, anch'esso è uno spazio T_2.
Infatti, se $x, y \in \prod_{i\in I} X_i$ sono due punti distinti, allora per un certo indice $i \in I$ deve essere $x_i \neq y_i$, quindi esistono in X_i aperti disgiunti U_i contenente x_i e V_i contenente y_i. Allora $\pi_i^{-1}(U_i)$ e $\pi_i^{-1}(V_i)$ sono aperti disgiunti del prodotto che contengono x e y, rispettivamente.

(3) è chiusa rispetto ai coprodotti.

(4) Non è chiusa rispetto ai quozienti, cioè un quoziente di uno spazio T_2 non è necessariamente T_2.
Infatti, sia $\mathbb{R}$ dotato della topologia τ generata dagli intorni usuali dei punti $x \neq 0$, mentre gli intorni basici di 0 sono gli insiemi della forma $(-\epsilon, \epsilon) - A$ ove $\epsilon > 0$ ed $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Allora $X = (\mathbb{R}, \tau)$ è T_2 ed A è chiuso in X. Se $q : X \to X/A$ è la funzione quoziente i punti $q(0)$ e $q(A)$ di X/A non possono essere separati da aperti disgiunti. Quindi $X/A \neq \mathbf{Top_2}$.
Sia X il sottospazio di $\mathbb{R}^2$ costituito dalle rette $y = 0$ ed $y = 1$. Sia $\mathcal{D}$ la decomposizione di X ottenuta identificando i punti $(x, 0)$ ed $(x, 1)$, per $x \neq 0$. Se $p : X \to X/\mathcal{D}$ è la funzione quoziente i punti $p(0, 0)$ e $p(0, 1)$ non possono essere separati in $\mathcal{D}$.

(5) L'immagine continua di uno spazio T_2 non è necessariamente T_2.

Teorema 2.8.4. *Per uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ sono equivalenti:*

(1) $X \in \mathbf{Top_2}$,

(2) *se $x \in X$, allora per ogni $y \in X$, $y \neq x$, esiste $U \in \mathcal{U}_x$ con $y \notin \overline{U}$,*

(3) *per ogni $x \in X$ si ha*
$$\bigcap_{U\in\mathcal{U}_x} \overline{U} = \{x\}$$

(4) *la diagonale* $\Delta \subset X \times X$ *è chiusa.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2): siano x, y punti distinti di X e siano U e V aperti disgiunti che li separano. Allora $y \notin \overline{U}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): se $x \neq y$ e $y \notin \overline{U}$, per qualche $U \in \mathcal{U}_x$, allora $y \notin \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{U}$.
(3) $\Rightarrow$ (4): proviamo che il complementare Δ^c di Δ è aperto in $X \times X$. Se $(x, y) \in \Delta^c$, allora $x \neq y$. Da (3) segue che esiste $U \in \mathcal{U}_x$ con $y \notin \overline{U}$. Si ha che $U \times \overline{U}^c$ è un intorno aperto di (x, y) in Δ^c, che quindi è aperto.
(4) $\Rightarrow$ (1): se $x \neq y$, è $(x, y) \notin \Delta$, quindi esiste $U \times V \in \mathcal{U}_{(x,y)}$ tale che $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Allora (2.1(11)) $U \cap V = \emptyset$. Cos$\frac{1}{2}$ $X \in \mathbf{Top_2}$. □

Proposizione 2.8.5. *Sia* $X \in \mathbf{Top_2}$ *e sia* $A \subset X$ *infinito. Allora* $x \in A'$ *se e solo se ogni intorno di* x *contiene un'infinità di punti di* A*.*

Dim. Una implicazione è evidente. Supponiamo che $x \notin A'$, allora esiste $U \in \mathcal{U}_x$ tale che $U \cap (A - \{x\}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Allora $U - \{x_1, \ldots, x_n\}$ è un intorno di x che non interseca A. Infatti, per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ha che $U - \{x_i\}$ contiene un aperto contenente x. □

Proposizione 2.8.6.

(1) *Se* $f : X \to Y$ *è continua e* $Y \in \mathbf{Top_2}$*, l'insieme*

$$C = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$$

è chiuso in $X \times X$*.*

(2) *Se* $f : X \to Y$ *è aperta, suriettiva e* C *è chiuso in* $X \times X$*, allora* $Y \in \mathbf{Top_2}$*.*

(3) *Se* $f, g : X \to Y$ *sono continue e* $Y \in \mathbf{Top_2}$*, l'insieme*

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

è chiuso in X*.*

(4) *Se* A *è* **denso** *in* X*, cioè* $\overline{A} = X$*, allora* $f = g$*.*

(5) *Gli epimorfismi di* **Top$_2$** *sono le funzioni continue ad immagine densa. Quindi in* **Top$_2$** *gli epimorfismi sono pi? numerosi delle funzioni continue suriettive.*

Dim. (1): sia $(x_1, x_2) \neq C$, allora $f(x_1) \neq f(x_2)$, quindi esistono intorni aperti disgiunti $f(x_1) \in U$ ed $f(x_2) \in V$. Si ha che $f^{-1}(U) \times f^{-1}(V)$ è un intorno aperto di (x_1, x_2) che non interseca C, il quale è allora chiuso.
(2): Siano $f(x_1) \neq f(x_2)$ punti distinti di Y, $\cos\frac{1}{2}(x_1, x_2) \neq C$. Allora esistono intorni aperti $x_1 \in U$ ed $x_2 \in V$ tali che $C \cap (U \times V) = \emptyset$. Poichè f è aperta si ottiene che $f(U)$ ed $f(V)$ sono intorni aperti di $f(x_1)$ ed $f(x_2)$, risp., e vale $f(U) \cap f(V) = \emptyset$.
(3): si consideri il diagramma

$$\begin{tikzcd}
& Y \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "<f,g>"] \arrow[dr, "g"'] & Y \times Y \arrow[u, "\pi_1"'] \arrow[d, "\pi_2"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

e si noti che risulta $A = < f, g >^{-1} (\Delta)$. Poichè Y è T_2 segue che A è chiuso.
(4) e (5) seguono immediatamente dalle precedenti. $\square$

Proposizione 2.8.7. *Nella categoria* **Top$_2$**

(1) *i monoestremali sono le immersioni topologiche chiuse,*

(2) *gli epiestremali sono le funzioni quoziente.*

Dim.
(1) Sia $f : X \to Y$ un'immersione chiusa l'asserto si prova analogamente a

(2.6.1).
Viceversa, se $f : X \to Y$ è un monoestremale, consideriamo la fattorizzazione

$$X \xrightarrow{f'} \overline{[f(X)]} \xrightarrow{i} Y$$

allora f' è un epimorfismo, segue che è un omeomorfismo.
Anche la prova di (2) è analoga a quella di (2.6.2). □

Proposizione 2.8.8. *La categoria* $\mathbf{Top}_2$ *ammette fattorizzazioni* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *ove*

(1) $\mathcal{E}$ = *epimorfismi,* $\mathcal{M}$ = *immersioni topologiche chiuse,*

(2) $\mathcal{E}$ = *funzioni quoziente,* $\mathcal{M}$ = *monomorfismi.*

Dim.
(1) La fattorizzazione è quella esibita nella Proposizione precedente.
(2) Come in (2.6.3).

□

2.8.9 Identificazione T_2.

Sia $X = (X, \tau)$ uno spazio topologico arbitrario. Consideriamo la relazione di equivalenza su X definita come segue:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y),\ \forall f : X \to Z, \forall\ Z \in \mathbf{Top_2}.$$

Proviamo che lo spazio quoziente $X/\sim$ è T_2:
siano $[x] \neq [y]$, allora esiste uno spazio $Z \in \mathbf{Top_2}$ ed una funzione continua $f : X \to Z$ per cui risulta $f(x) \neq f(y)$. Esistono in Z aperti disgiunti $f(x) \in U$ e $f(y) \in V$, quindi $x \in f^{-1}(U)$ e $y \in f^{-1}(V)$ sono aperti disgiunti di X. Detta poi $q : X \to X/\sim$ la funzione continua quoziente, segue che $q(f^{-1}(U))$ e $q(f^{-1}(V))$ sono intorni disgiunti di $[x]$ e $[y]$, risp., in $X/\sim$. Infatti, se fosse

$$[z] \in q(f^{-1}(U)) \cap q(f^{-1}(V)) = q(f^{-1}(U)) \cap (f^{-1}(V)),$$

allora risulterebbe $z \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V))$.

Chiamiamo lo spazio $X/\sim = T_2(X)$ la **identificazione** T_2 ("largest Hausdorff quotient") di X.
Anche in questo caso si ottiene un funtore

$$T_2 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top_2}$$

che è aggiunto a sinistra dell'inclusione $E : \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Top}$.
Sia $q_X : X \to T_2(X)$ la funzione continua quoziente e sia $f : X \to Y$, $Y \in \mathbf{Top_2}$, una funzione continua. Si ha un diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q_X"] \arrow[dr, "f"'] & T_2(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

ove $\tilde{f} : T_2(X) \to Y$ è la funzione continua definita da $\tilde{f}([x]) = f(x)$.
C'è solo da verificare che $\tilde{f}$ sia ben definita, ma questo discende subito dalla definizione di $T_2(X)$. Evidentemente $\tilde{f}$ è l'unica funzione continua che rende commutativo il triangolo sopra.
Quanto visto ci assicura dei seguenti fatti:

- se $f : X \to Y$ è una qualunque funzione continua allora $T_2(f) = \widetilde{q_Y \circ f}$ è definita dalla commutatività di

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q_X"] \arrow[d, "f"'] & T_2(X) \arrow[d, "T_2(f)"] \\ Y \arrow[r, "q_Y"] & T_2(Y) \end{tikzcd}$$

- per ogni $X \in \mathbf{Top}$ e per ogni $Y \in \mathbf{Top_2}$ c'è una biiezione (naturale)

$$\phi_{X,Y} : \mathbf{Top_2}(T_2(X), Y) \to \mathbf{Top}(X, E(Y)),$$

  con l'unità di aggiunzione data da

$$\{q_X : X \to ET_2(X) \mid \forall X \in \mathbf{Top}\}.$$

2.8.10 Spazi regolari. $\mathbf{Top_3}$.

Uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ si dice **regolare** se verifica il seguente assioma:

Reg *dato un punto $x \in X$ ed un chiuso $A \subset X$ non contenente x, esistono aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ et $A \subset V$.*

Uno spazio indiscreto è sempre regolare, quindi la regolarità non implica T_2, a meno che i punti dello spazio non siano chiusi.

$\mathbf{T_3}$: *Uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ è uno spazio T_3 se è T_1 e regolare.*

Denoteremo con $\mathbf{Top_3}$ la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi T_3. Si ha:

$$T_3 \Rightarrow T_2, \quad \text{cioè} \quad \mathbf{Top_3} \subset \mathbf{Top_2},$$

ma il viceversa non vale. Se X è la retta reale con la topologia definita in 2.6.7, essa è T_2. D'altra parte l'insieme $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è chiuso ma non può essere separato da 0. Allora $T_2 \not\Rightarrow T_3$.

Teorema 2.8.9. *Per uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ sono equivalenti:*

(1) *X è regolare,*

(2) *per ogni $x \in X$ e per ogni aperto $x \in U$ esiste un aperto $x \in V$ con $\overline{V} \subset U$,*

(3) *per ogni $x \in X$ esiste una base di intorni costituita da chiusi.*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2): sia X regolare e $x \in U$ un aperto. Allora $X - U$ è un chiuso che non contiene x, quindi esistono aperti disgiunti V, W con $x \in V$ e $X - U \subset W$. Poichè $X - W$ è un chiuso contenuto in U e contenente V, segue l'asserto.
(2) $\Rightarrow$ (3): basta applicare (2) a tutti i punti di X.
(3) $\Rightarrow$ (1): sia $A \subset X$ un chiuso e $x \notin A$. Allora $X - A$ è un intorno di x. Per ipotesi esiste un chiuso B tale che $x \in B \subset X - A$. B° e $X - B$ sono aperti disgiunti che separano x ed A. $\square$

2.8.11 Proprietà generali.

(1) è chiusa rispetto ai sottospazi, cioè: un sottospazio di uno spazio T_3 è ancora T_3.

(2) è chiusa rispetto ai prodotti: se $\prod_{i\in I} X_i$ è il prodotto di una famiglia di spazi T_3, anch'esso è uno spazio T_3.
La parte T_1 è nota. Sia $\{X_i \mid i \in I\}$ una famiglia di spazi regolari e sia $\prod_{i\in I} X_i$ il loro prodotto in **Top**. Se $x \in \prod_{i\in I} X_i$, sia $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$ un suo intorno. Allora ciascun U_{α_i} è un intorno di x_{α_i} in X_{α_i}, pertanto U_{α_i} contiene un intorno chiuso F_{α_i} di x_{α_i}. Allora $\pi^{-1}(F_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi^{-1}(F_{\alpha_n})$ è un intorno chiuso di x contenuto in $\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$.

(3) è chiusa rispetto ai coprodotti.

(4) Non è chiusa rispetto ai quozienti, cioè un quoziente di uno spazio T_3 non è necessariamente T_3.
Sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ con la seguente topologia:

- gli intorni di (x, y), $y > 0$, sono quelli usuali,

- se z è un punto dell'asse x, un suo intorno è un insieme del tipo $\{z\} \cup A$, essendo A l'interno di un disco nell'interno del semipiano positivo, tangente all'asse x in z (piano di Moore). Γ è T_3 poichè si vede facilmente che ogni punto ammette una base di intorni chiusi. Denotiamo con Q ed I gli insiemi dei punti razionali, risp. irrazionali, dell'asse x. Q ed I sono chiusi di Γ che non possono essere separati da aperti disgiunti. Poniamo $Y = X/\mathcal{D}$, ove $\mathcal{D}$ ha elementi Q, I ed i punti di $\Gamma - (Q \cup I)\}$. Y non è T_2 poichè Q ed I non possono essere separati da aperti disgiunti.

(5) L'immagine continua di uno spazio T_3 non è necessariamente T_3.

2.8.12 Spazi di Tychonoff. $\mathbf{Top}_{3\frac{1}{2}}$.

Uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ si dice **completamente regolare** se verifica il seguente assioma:

CReg : *dato un punto $x \in X$ ed un chiuso $A \subset X$ non contenente x, esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, $\forall\ y \in A$.*

Ogni spazio completamente regolare è regolare. Infatti se X è completamente regolare ed A è un chiuso di X con $x \notin A$, sia $f : X \to [0,1]$ continua trale che $f(x) = 0$, $f(A) = 1$. Allora $f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ ed $f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ sono aperti disgiunti di X che contengono x ed A, rispettivamente. Di contro uno spazio competamente regolare non è necessariamente di Hausdorff: si consideri uno spazio indiscreto con pi? di un punto.

$\mathbf{T_{3\frac{1}{2}}}$: Uno spazio topologico $X = (X, \tau)$ è uno spazio $T_{3\frac{1}{2}}$ o **di Tychonoff** se è T_1 e completamente regolare.

$\mathbf{Top}_{3\frac{1}{2}}$ o anche **Tych** indicano la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi di Tychonoff.

$T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$, ma il viceversa non vale. Infatti, esiste uno spazio regolare per cui ogni funzione continua a valori reali è costante (S. Willard, General Topology).

2.8.13 Proprietà generali.

(1) è chiusa rispetto ai sottospazi, cioè: un sottospazio di uno spazio di Tychonoff è ancora di Tychonoff.

(2) è chiusa rispetto ai prodotti: se $\prod_{i\in I} X_i$ è il prodotto di una famiglia di spazi di Tychonoff, anch'esso è uno spazio di Tychonoff.
Sia $\{X_i \mid i \in I\}$ una famiglia di spazi di Tychonoff e sia $\prod_{i\in I} X_i$ il loro prodotto in **Top**. Sia $x \in \prod_{i\in I} X_i$ ed
$$\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n),$$
con $U_k \subset X_{i_k}$, $k = 1, \ldots, n$, un intorno aperto di x. Per ogni tale k esiste una funzione continua $f_k : X_{i_k} \to [0,1]$ tale che
$$f_k(x_{i_k}) = 1, \quad f_k(X_{i_k} - U_k) = 0.$$
Definiamo
$$g : \prod_{i\in I} X_i \to [0,1], \quad g(x) = min\{f_k(x_{i_k}) \mid k = 1, \ldots, n\},$$
allora $g(x) = 1$ mentre g svanisce fuori da $\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n)$.

(4) Non è chiusa rispetto ai quozienti, cioè un quoziente di uno spazio $T_{3\frac{1}{2}}$ non è necessariamente $T_{3\frac{1}{2}}$.

(5) L'immagine continua di uno spazio $T_{3\frac{1}{2}}$ non è necessariamente $T_{3\frac{1}{2}}$.

Proposizione 2.8.10. *Sia $\mathcal{F} = \{f_i : X \to X_i \mid i \in I\}$ una famiglia di funzioni continue che separa i punti dai chiusi di X. Allora*

(1) *X ha la topologia iniziale indotta da $\mathcal{F}$,*

(2) *se $X \in \mathbf{Top_1}$ la funzione continua di valutazione $e : X \to \prod_{i\in I} X_i$ è una immersione.*

Dim. (1): proviamo che la famiglia

$$\{f_i^{-1}(V) \mid i \in I, V \subset X_i \text{ aperto}\}$$

è una base per la topologia di X. Se $G \subset X$ è un aperto, per ogni $x \in G$ esiste $i \in I$ tale che $f_i(x) \notin \overline{f_i(X - G)}$. Esiste quindi un aperto $V \subset X_i$ tale che $f_i(x) \in V$ e $V \cap f_i(X - G) = \emptyset$. Segue che $f_i^{-1}(V)$ è un intorno aperto di x tale che

$$f_i^{-1}(V) \cap (X - G) \subset f_i^{-1}(V) \cap f_i^{-1} f_i(X - G) \subset f_i^{-1}(V \cap f_i(X - G)) = \emptyset.$$

quindi $f_i^{-1}(V) \subset G$.
(2): in ambiente T_1 la famiglia separa i punti, pertanto l'asserto segue da (2.3.7). $\square$

Sia X uno spazio completamente regolare. Denotiamo con $\mathcal{C}^*(X)$ l'anello delle funzioni a valori reali, continue e limitate:

$$\mathcal{C}^*(X) = \{f : X \to [0, 1] \mid f \text{ continua}\}.$$

Si ha:

Proposizione 2.8.11.

(1) *X è completamente regolare se e solo se $\mathcal{C}^*(X)$ separa i punti dai chiusi di X, pertanto X ha la topologia debole indotta da $\mathcal{C}^*(X)$.*

(2) *Uno spazio topologico X è di Tychonofff se e solo se è (omeomorfo a) un sottospazio di qualche cubo.*

Dim. (2): per ogni insieme A si ha che lo spazio prodotto $[0,1]^A$ è di Tychonoff, allora se $X \subset [0,1]^A$ anche X è di Tychonoff. Viceversa, se X è di Tychonoff, da

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & \prod_{\alpha \in A}[0,1]_\alpha = [0,1]^A \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ & {[0,1]_\alpha} \end{tikzcd}$$

per $f \in \mathcal{C}^*(X)$ e $[0,1]_f = [0,1]$, da 2.6.6(1) e 2.6.7(1), segue che e è una immersione □

2.8.14 Il funtore di completa regolarizzazione.

Sia $X = (X, \sigma) \in \mathbf{Top_1}$. Sia σ' la topologia debole indotta su X da $\mathcal{C}^*(X)$. Allora $\sigma' \leq \sigma$, la funzione identica $id : (X,\sigma) \to (X,\sigma')$ è continua e (X,σ') è completamente regolare.
Nota che la continuità delle $f \in \mathcal{C}^*(X)$ è intesa rispetto alla topologia σ assegnata su X.
La completa regolarità di (X,σ') segue dalle Prop. 2.3.7 e 2.6.8(2).

Proposizione 2.8.12. *Se $f : (X,\sigma) \to Y$, $Y \in$ **Tych**, è continua, allora è continua anche $f : (X,\sigma') \to Y$.*

Dim. Infatti: sia $G \subset Y$ un aperto. Per la proposizione precedente, si ha che G è una unione di intersezioni finite di insiemi della forma $f_i^{-1}(U_i)$ con U_i aperto in $[0,1]$, per $f_i \in \mathcal{C}^*(Y)$. Poichè ciascun $f_i^{-1}(U_i) \in \sigma'$, segue che $f^{-1}(G) \in \sigma'$. □

Poniamo $\tau(X) = (X, \sigma')$ e sia $\tau_X : X \to \tau(X)$ la funzione continua identica. Per ogni funzione continua $f : (X, \sigma) \to Y$, $Y \in \mathbf{Tych}$, esiste allora un'unica funzione continua $\tilde{f}$ che commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[dr, "f"'] & \tau(X) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Per ogni $X \in \mathbf{Top}$ e per ogni $Y \in \mathbf{Tych}$ c'è allora una biiezione (naturale)

$$\phi_{X,Y} : \mathbf{Tych}(\tau(X), Y) \to \mathbf{Top}(X, E(Y)).$$

Quanto sopra ci permette di definire un funtore $\tau : \mathbf{Top} \to \mathbf{Tych}$, aggiunto a sinistra dell'inclusione $E : \mathbf{Tych} \to \mathbf{Top}$, quindi anche $\mathbf{Tych}$ è una sottocategoria riflessiva di $\mathbf{Top}$.
τ prende il nome di funtore di **completa regolarizzazione** $(+T_1)$ **o Tychonovizzazione** degli spazi topologici.

Proposizione 2.8.13. *Siano X_i, $i \in I$, spazi topologici, allora:*

$$\prod_{i \in I} X_i \in \mathbf{Top_j},\ j = 0, 1, 2, 3, 3_{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad X_i \in \mathbf{Top_j},\ j = 0, 1, 2, 3, 3_{\frac{1}{2}},\ i \in I.$$

Dim. Proviamo l'asserto per $j = 2$, gli altri casi si provano in modo analogo. Siano $x_i \neq y_i \in X_i$. Siano poi $x \in \pi_i^{-1}(x_i)$ ed $y \in \pi_i^{-1}(y_i)$. Allora $x \neq y \in \prod_{i \in I} X_i$, cosÏ esistono aperti disgiunti $x \in A$ ed $y \in B$ nel prodotto. Poichè le proiezioni sono aperte segue che $x_i \in \pi_i(A)$ e $y_i \in \pi_i(B)$ sono aperti disgiunti di X_i. $\square$

2.8.15 Spazi Normali. $\mathbf{Top_4}$.

Uno spazio topologico X si dice **normale** se vale:

Nor *se $A, B \subset X$ sono chiusi disgiunti, esistono aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Uno spazio normale e T_1 si dice uno spazio T_4. $\mathbf{Top_4}$ denota la sottocategoria piena di **Top** degli spazi normali e T_1.

Proposizione 2.8.14. *Se A, B sono chiusi disgiunti di uno spazio di Hausdorff X, esistono aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $A \subset U$ e $B \subset V$.*

Dim. In base a 7.2.2(2), oper ogni $a \in A$ esiste $U \in \mathcal{U}_a$ tale che $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Poichè A è compatto, esistono aperti $U_1, \ldots, U_n$ tali che $\overline{U_i} \cap B = \emptyset$, per $i = 1, \ldots, n$ ed

$$A \subset V = \bigcup_{i=1}^{i=n} U_i.$$

Allora V è un aperto contenente A e $X - \overline{V}$ è un aperto contenente B. $\square$

Teorema 2.8.15. *(Lemma di Urisohn) Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- *X è normale,*
- *se $A, B \subset X$ sono chiusi disgiunti di X, esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(A) = 0$ ed $f(B) = 1$.*

2.9 Compattezza.

2.9.1 Spazi Compatti. Comp.

Se $X = (X, \tau)$ è uno spazio topologico, un **ricoprimento aperto** di X è una famiglia $\mathcal{U} \subset \tau$ di aperti la cui unione da tutto X.

Definizione 2.9.1. *Uno spazio topologico X si dice* **compatto** *se ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ ammette un sottoricoprimento finito. Cioè esiste una sottofamiglia finita $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ che ricopre X.*

Ad esempio:

- $\mathbb{R}$ non è compatto: il ricoprimento $\{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ non ammette un sottoricoprimento finito.

- $I = [0, 1]$ è compatto.
  Infatti: sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di I e poniamo

  $$K = \{x \in I \mid [0, x] \text{ è ricoperto da un numero finito di elementi di } \mathcal{U}\}.$$

  Allora $0 \in K$, se $x \in K$ e $0 < b < x$, anche $b \in K$. Segue che K è un sottointervallo di I contenente 0. Osserviamo poi che, per $x \in K$, $x \neq 1$, ogni sottofamiglia finita di $\mathcal{U}$ che ricopre $[0, x]$, ricopre anche $[0, x + \epsilon]$, per qualche $\epsilon > 0$. Allora K è aperto in I e quindi è della forma $[0, k)$. Si ha che $k \in K$: se U è un intorno aperto di k in I, allora aggiungendo U ad un qualunque ricoprimento finito di K, si ottiene un ricoprimento finito di $[0, k]$. Quindi K è un sottoinervallo contemporaneamente aperto e chiuso di I, pertanto $K = I$.

Denoteremo con **Comp** la sottocategoria piena di **Top** costituita dagli spazi compatti e con $\mathbf{CompT_2}$ la sottocategoria piena di $\mathbf{Top_2}$ costituita dagli spazi compatti di Hausdorff.

Da (2.6.14) si ottiene

Proposizione 2.9.2. $\mathbf{CompT_2} \subset \mathbf{Top_4}$.

Proposizione 2.9.3. *Sia X uno spazio topologico,*

(1) *se X è compatto ed $A \subset X$ è chiuso, allora A è compatto.*

(2) *se $X \in \mathbf{Top_2}$, $A \subset X$ è compatto e $x \notin A$ allora x ed A possono essere separati da aperti disgiunti.*

(3) *se $X \in \mathbf{Top_2}$ ed $A \subset X$ è compatto, allora A è chiuso in X.*

(4) *l'immagine continua di uno spazio compatto è compatta. In particolare* **Comp** *è chiusa rispetto ai quozienti.*

(5) *sia $f : X \to Y$ continua, $X \in$* **Comp** *ed $Y \in \mathbf{Top_2}$. Allora f è chiusa.*

Dim. (1) Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di A. Per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste un aperto V_U di X tale che $U = V_U \cap A$. Allora $\{V_U \mid U \in \mathcal{U}\} \cup (X - A)$ è un ricoprimento aperto di X. Quindi $\mathcal{U}$ ammette un sottoricoprimento finito.
(2) Per ogni $y \in A$ esistono aperti disgiunti $x \in V_x(y)$ e $y \in V_y$. Allora $\{V_y \cap A \mid y \in A\}$ è un ricoprimento aperto di A il quale ammette un sottoricoprimento finito

$$\{V_{y_1} \cap A, \dots, V_{y_n} \cap A\},$$

cioè $A = (V_{y_1} \cap A) \cup \dots, \cup (V_{y_n} \cap A)$. Allora $U_A = V_{y_1} \cup \dots, \cup V_{y_n}$ è un aperto di X contenente A e $U_x = V_x(y_1) \cap \dots, \cap V_x(y_n)$ è un aperto di X contenente x. Si ha evidentemente $U_x \cap U_A = \emptyset$.
(3) Se $x \in X - A$, per quanto sopra esistono aperti disgiunti $x \in U_x$ ed $A \subset U_A$. Allora $U_x \subset X - A$, cos$\frac{1}{2}$ $X - A$ è aperto.
(4) Sia $f : X \to Y$ una funzione continua suriettiva con X uno spazio compatto. Se $\mathcal{V}$ è un ricoprimento aperto di Y allora

$$f^{-1}(\mathcal{V}) = \{f^{-1}(V) \mid V \in \mathcal{V}\}$$

è un ricoprimento aperto di X che ammette un sottoricoprimento finito

$$\{f^{-1}(V_1), \dots, f^{-1}(V_n)\}.$$

Finalmente $\{V_1, \dots, V_n\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{V}$.
(5) Se $F \subset X$ è chiuso, allora F è compatto ed è compatto anche $f(F)$ in Y. Finalmente $f(F)$ è chiuso. $\square$

Lemma 2.9.4. *(Tube lemma) Siano X, Y spazi topologici con Y compatto. Se N è un aperto di $X \times Y$ contenente una "slice" $x_0 \times Y$, allora N contiene un "tubo" $W \times Y$, essendio W un intorno di x_0 in X.*

Dim. N è unione di elementi basici $U \times V$ con U e V aperti in X e Y rispecttivamente. Poichè $x_0 \times Y$ è compatto (è omeomorfo ad Y), solo un numero finito $U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n$ di tali elementi basici ricoprono $x_0 \times Y$. Possiamo assumere che ciascuno degli elementi basici $U_i \times V_i$ intersechi $x_0 \times Y$. Define $W = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. L'insieme W è aperto e contiene x_0. Proviamo che $W \times Y \subset N$. Sia $(x, y) \in W \times Y$. Poichè il punto (x_0, y) è in qualche $U_i \times V_i$ segue che $y \in V_i$. D'altra parte $x \in W \subset U_i$, quindi l'asserto. □

Piossiamo dare ora la seguente caratterizzazione degli spoazi di Tychonoff.

Proposizione 2.9.5. *Per uno spazio topologico X sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(1) *X è di Tychonoff,*

(2) *X è omeomorfo ad un sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff.*

Dim. L'imlicazione (1) $\Rightarrow$ (2) è ovvia. Per il viceversa: se X è omeomorfo ad un sottospazio di uno spazio compatto di Hausdorff Y, allora poichè Y è anche normale (2.7.2), dal Lemma di Urisohn segue che X è di Tyconoff.

□

Teorema 2.9.6. *(Bolzano-Weierstrass)*
Ogni sottinsieme infinito di uno spazio compatto ammette un punto di accumulazione.

Dim. Sia $X \in$ **Comp** ed $A \subset X$ infinito. Supponiamo che A non abbia punti di accumulazione: allora, per ogni $x \in X$ esiste un intorno $x \in U_x$ tale che $U_x \cap A \subset \{x\}$. Poichè $\{U_x \mid x \in X\}$ è un ricoprimento aperto che ammette un sottoricoprimento finito $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$, segue che

$$A = A \cap X = A \cap (U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}) \subset \{x_1, \ldots, x_n\}$$

che contraddice l'ipotesi che A sia infinito. □

Il teorema precedente insieme alla (2.6.5), sono gli strumenti per provare il seguente

Teorema 2.9.7. *(Heine-Borel)*
Un sottinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ $n > 0$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato (cioè esiste $k > 0$ tale che $d(x, y) \leq k, \ \forall \ x, y \in A$).

Dim. Se A è compatto nello spazio di Hausdorff $\mathbb{R}^n$, allora e chiuso. Per ogni $x \in A$, le bocce aperte $B(x, 1)$ costituiscono un ricoprimento di A, quindi esiste un insieme finito $\{B(x_1, 1), \ldots, B(x_n, 1)\}$ di insiemi limitati che ricopre A, il quale è pertanto limitato. Viceversa si consideri nla i-esima proiezione $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e sia $B_i = \pi_i(A) \subset \mathbb{R}$. Essendo A limitato anche B_i deve essere limitato, infatti se $d(x, y) \leq k$ in $\mathbb{R}^n$, allora anche $d(x_i, y_i) \leq k$ in $\mathbb{R}$. Segue

$$A \subset \prod_{i=1}^{i=n} B_i \subset \prod_{i=1}^{i=n} [a_i, b_i],$$

ed essendo l'ultimo spazio compatto di Hausdorff, segue che anche A è compatto. □

Definizione 2.9.8. *Una famiglia di sottinsiemi di un insieme X ha la PIF (=* **propriet? della intersezione finita***) se ogni sua sottofamiglia finita ha intersezione non vuota.*

Teorema 2.9.9. *Per uno spazio topologico X sono equivalenti:*

(1) *X è compatto,*

(2) *ogni famiglia di chiusi con la PIF ha intersezione non vuota.*

(3) *ogni rete in X ha un punto di accumulazione,*

Dim. (1) $\Rightarrow$ (2): sia $\{F_i \mid i \in I\}$ una famiglia di chiusi di X con la FIP e supponiamo che $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. Allora $\{X - F_i \mid i \in I\}$ è un ricoprimento aperto di X. Essendo X compatto esiste un sottoricoprimento finito $X =$

$\bigcup_{k=1}^{n}(X-F_k)$. Allora $\bigcap_{k=1}^{n} F_k=\emptyset$, che contraddice l'ipotesi.
(2) $\Rightarrow$ (1): Sia $\mathcal{U}=\{U_i \mid i\in I\}$ un ricoprimento aperto di X. La famiglia di chiusi $\{X-U_i \mid i\in I\}$ ha intersezione vuota

$$\bigcap_{i\in I}(X-U_i)=X-\bigcup_{i\in I}U_i=\emptyset.$$

Supposto che non esista un sottoricoprimento finito di $\mathcal{U}$, allora, per ogni scelta $i_1,\dots,i_n\in I$ si ha

$$U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}\neq X \quad \Rightarrow (X-U_{i_1})\cap\cdots\cap(X-U_{i_n})\neq\emptyset,$$

il che contraddice la PIF.
(2) $\Rightarrow$ (3): sia $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una rete che non ammette punti di accumulazione. Allora, per ogni $x\in X$ esistono $U_x\in\mathcal{U}_x$ e $\lambda_x\in\Lambda$ con $x_\lambda\notin U_x$, per ogni $\lambda\geq\lambda_x$. La famiglia di chiusi $\{X-U_x \mid x\in X\}$ ha allora la PIF, cosicchè $\bigcap_{x\in X}(X-U_x)\neq\emptyset$, che contraddice il fatto che di $\bigcup_{x\,\in\,X}U_x=X$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Sia $\mathcal{F}=\{F_i \mid i\in I\}$ una famiglia di chiusi di X con la PIF. Definiamo una rete in X come segue:
sia

$$\Lambda=\{\{i_1,\dots,i_n\} \mid i_1,\dots,i_n\in I, n\in\mathbb{N}\},$$

$$\lambda_1=\{i_1,\dots,i_k\}\ \leq\ \lambda_2=\{j_1,\dots,j_n\}\Leftrightarrow\lambda_1\subset\lambda_2.$$

Poichè $\mathcal{F}$ ha la PIF, fissato un qualunque $\lambda=\{i_1,\dots,i_n\}$ fissiamo un $x_\lambda\in\bigcap_{k=1}^{k=n}F_{i_k}$, costruendo in tal modo una rete (x_λ) in X. Tale rete ammette per ipotesi un punto di accumulazione $x\in X$, pertanto esiste per (2.5.2) una sua sottorete (x_{λ_μ}) che converge ad x. Proviamo che $x\in\bigcap_{i\in I}F_i$. Si noti che per ogni $i\in I$ esiste per cofinalità un μ_0 tale che $\lambda_{\mu_0}\geq\{i\}$. Allora, per ogni

$$\lambda_\mu=\{i_1,\dots,i_n,i\}\geq\lambda_{\mu_0}\geq\{i\},$$

si ha che $x_{\lambda_\mu}\in F_{i_1}\cap\cdots\cap F_{i_n}\cap F_i\subset F_i$. Poichè $x_{\lambda_\mu}\to x$ e F_i è chiuso, deve essere $x\in F_i$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

* * *

Da notare che nel corso della dimostrazione (3) $\Rightarrow$ (1) si è fatto uso dell'assioma della scelta. In effetti il Teorema di Tychonoff che segue è equivalente all'assioma della scelta.

Teorema 2.9.10. *(Tychonoff) Un prodotto di spazi topologici è compatto se e solo se ogni spazio fattore è compatto.*

Dim. Si noti che se il prodotto è compatto, la compattezza dei fattori segue da 2.7.2(4) sopra. Viceversa, sia $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ una rete in $\prod_{i\in I} X_i$. Per ogni $i \in I$ si ottiene una rete $(\pi_i(x_\lambda)$ in X_i. Per ipotesi ed in virt? di (2.5.3), esiste una sottorete $(\pi_i(x_{\gamma_i}))$ che converge ad un punto $y_i \in X_i$. Consideriamo il punto $y = (y_i) \in \prod_{i\in I} X_i$ e sia

$$\pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

un intorno basico di y. Si noti che ciascun U_{i_k}, $k = 1, \ldots n$, è un intorno aperto di y_{i_k} in X_{i_k}. Segue che esiste $\lambda_{i_k}^0 \in \Lambda$ tale che $\pi_{i_k}(x_{\gamma_i}) \in U_{i_k}$, per ogni $\gamma_i \geq \lambda_{i_k}^0$ e per ogni $k = 1, \ldots n$. Posto $\lambda^* = max\{\lambda_{i_k}^0 \mid k = 1, \ldots n\}$ si ottiene, per ogni $\gamma_i \geq \lambda^*$ e per ogni $k = 1, \ldots n$, che $\pi_{i_k}(x_{\gamma_i}) \in U_{i_k}$. A questo punto si ha che, per ogni $\gamma_i \geq \lambda^*$, risulta

$$x_{\gamma_i} \in \pi_{i_1}^{-1}\pi_{i_1}(x_{\gamma_i}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}\pi_{i_n}(x_{\gamma_i}) \subset \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$

quindi y è punto di accumulazione per $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. In base a (2.7.5) segue la compattezza di $\prod_{i\in I} X_i$. $\square$

Corollario 2.9.11. *Ogni cubo* $[0,1]^A$, $A \in$ **Set**, *è uno spazio compatto e di Hausdorff.*

2.9.2 La compattificazione di Stone-Čech.

Abbiamo visto che se X è uno spazio di Tychonoff, allora X si immerge in un cubo:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "f"'] & \prod_{f \in \mathcal{C}^*(X)} [0,1]_f \arrow[d, "\pi_f"] \\
& {[0,1]_f}
\end{tikzcd}$$

per $[0,1]_f = [0,1]$, $\forall\ f \in \mathcal{C}^*(X)$, attraverso la funzione continua di valutazione e. Poniamo $\beta(X) = \overline{e(X)}$. Allora $\beta(X)$ è compatto, inquanto chiuso di uno spazio compatto, e di Hausdorff.

$\beta(X)$ si chiama la **compattificazione di Stone-Cech** di X. Si ha in effetti un funtore

$$\beta : \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompT_2},$$

ove con $\mathbf{CompT_2}$ si indica la categoria degli spazi compatti di Hausdorff. Infatti:
sia $h : X \to Y$ una funzione continua di spazi di Tychonoff e si consideri il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_X"] \arrow[d, "h"'] \arrow[rrd, bend left=60, "g \circ h"] & \prod_{f \,\in\, \mathcal{C}^*(X)} [0,1]_f \arrow[d, "\tilde{h}"] \arrow[rd, "\pi_{g\circ h}"] & \\
 & & {[0,1]_g} \\
Y \arrow[r, "e_Y"] \arrow[rru, bend right=60, "g"'] & \prod_{g \,\in\, \mathcal{C}^*(Y)} [0,1]_g \arrow[ru, "\pi_g"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $\tilde{h}$ è l'unica funzione continua indotta dalla proprietà universale del prodotto tale che : $\pi_{g\circ h} = \pi_g \circ \tilde{h}$, per ogni $g \in \mathcal{C}^*(Y)$. Si ha $\tilde{h}e(X) \subset e(Y)$. Infatti, se $x \in X$, per ogni $g \in \mathcal{C}^*(Y)$, si ha

$$\pi_g(\tilde{h}e_X(x)) = \pi_{g\circ h}e_X(x) = (g \circ h)(x) = \pi_g e_Y(h(x)).$$

Segue la commutatività del quadrato : $\tilde{h} \circ e_X = e_Y \circ h$.

In base a (2.2.25), dal fatto che $\tilde{h}(\overline{e(X)}) \subset \overline{\tilde{h}e(X)} \subset \overline{e(Y)}$, segue l'asserto, cioè $\tilde{h} : \beta(X) \to \beta(Y)$. Si pone $\tilde{h} = \beta(h)$.

* * *
Si è usato il seguente fatto: se $f : X \to Y$ è continua ed $A \subset X$ allora

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Infatti: da $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}\overline{f(A)}$ segue $\overline{A} \subset f^{-1}\overline{f(A)}$. Infine, $f(\overline{A}) \subset ff^{-1}\overline{f(A)} \subset \overline{f(A)}$.

Notiamo che nel caso in cui Y sia compatto, allora $Y = \beta(Y)$. Si ha pertanto la nota situazione

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_X"] \arrow[dr, "h"'] & \beta(X) \arrow[d, "\tilde{h}"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

che esibisce $\beta : \mathbf{Tych} \to \mathbf{CompT_2}$ come aggiunto a sinistra dell'inclusione $E : \mathbf{CompT_2} \to \mathbf{Tych}$.

$$\phi_{X,Y} : \mathbf{CompT_2}(\beta(X), Y) \to \mathbf{Tych}(X, E(Y)),$$

è la biiezione di aggiunzione, per ogni $X \in \mathbf{Tych}$ e per ogni $Y \in \mathbf{CompT_2}$. Pertanto $\mathbf{CompT_2}$ è sottocategoria riflessiva di $\mathbf{Tych}$, con unità di aggiunzione $\{e_X : X \to \beta(X) \mid \forall\ X \in \mathbf{Tych}\}$. Nota che e_X è una immersione ad immagine densa, pertanto è un epimorfismo in $\mathbf{CompT_2}$.

Nota 2.9.12. *Se X è uno spazio topologico qualunque, si può considerare la sua Thichonovizzazione $\tau(X)$ e poi di questa fare la compattificazione di Stone-Cech $\beta(\tau(X))$. Tale costruzione fornisce una riflessione di* $\mathbf{CompT_2}$ *in* $\mathbf{Top}$.

2.10 Spazi Localmente Compatti.

Definizione 2.10.1. *Uno spazio topologico X si dice* **localmente compatto** *se ogni suo punto ha un intorno compatto.*

Teorema 2.10.2. *Per uno spazio di Hausdorff X sono equivalenti:*

(1) *X è localmente compatto.*

(2) *ogni punto ammette una base di intorni compatti, cioè per ogni $x \in X$ ogni intorno aperto $U \in \mathcal{U}_x$ contiene un intorno compatto $K \subset U$.*

(3) *per ogni punto $x \in X$ ed ogni intorno aperto $U \in \mathcal{U}_x$ esiste un intorno aperto pi? piccolo $V \subset U$ la cui chiusura è compatta e contenuta in U:*

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U.$$

Dim. Le implicazioni (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) sono evidenti.
(1) $\Rightarrow$ (2): sia $x \in X$ e siano K un intorno compatto di x e $U \in \mathcal{U}_x$. Posto $V = (K \cap U)^\circ$ risulta $V \in \mathcal{U}_x$. Notiamo che $\overline{V}$ è a sua volta compatto e di Hausdorff, quindi regolare. In base a (2.6.5), poichè V è intorno di x in $\overline{V}$, segue che esiste $W \in \mathcal{U}_x$ tale che

$$x \in \overline{W} \subset V \subset \overline{V} \subset U,$$

con $\overline{W}$ intorno compatto di x.
(2) $\Rightarrow$ (3): supponiamo che per ogni $x \in X$ ogni intorno aperto $U \in \mathcal{U}_x$ contenga un intorno compatto $K \subset U$. Allora

$$x \in K^\circ \subset K \subset U \subset X.$$

Poichè X è di Hausdorff segue che K è chiuso in X. Posto $V = \overline{(K^\circ)}$ si ha $V \subset K$. V è anche chiuso in K, quindi compatto. Segue l'asserto. $\square$

Si ricordi l'aggiunzione (1.3.6 (1)) tra i funtori

$$(-) \times X, \mathrm{Hom}(X, -) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set},$$

con le biiezioni di aggiunzione

$$\phi_{Y,Z} : \mathrm{Hom}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, \mathbf{Set}(X, Z)).$$

ove, per $f : X \times Y \to Z$, la funzione $\alpha_f = \phi_{X,Y}(f)$ è definita da:

$$\alpha_f : Y \to \mathrm{Hom}(X, Z), \quad y \mapsto f_y : X \to Z, \quad f_y(x) = f(x, y).$$

Di seguito ci occupiamo della possibilità di estendere tale aggiunzione alla categoria **Top** degli spazi topologici.
In generale, dati due spazi topologici X e Y, si possono però assegnare sull'insieme $\mathrm{Hom}(X, Y)$ diverse topologie, non sempre ottenendo il risultato voluto.

Definizione 2.10.3. *Dati due spazi topologici X e Y. La topologia* **compatta-aperta** *sull'insieme* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *delle funzioni continue da X a Y è quella generata dai sottinsiemi del tipo $M(A, U)$, ove $A \subset X$ è compatto e $U \subset Y$ è aperto, definiti da*

$$M(A, U) = \{f : X \to Y \mid f(A) \subset U\}.$$

Denoteremo con $\mathbf{Top}(X, Y)$ *l'insieme* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *dotato della topologia compatta-aperta.*

Nota 2.10.4. Si osservi che nel caso in cui $X = \{*\}$ sia lo spazio puntiforme, allora c'è un ovvio omeomorfismo $Y \cong \mathbf{Top}(\{*\}, Y)$.

Proposizione 2.10.5. *Siano X e Y spazi topologici, con Y di Hausdorff. Allora anche* $\mathbf{Top}(X, Y)$ *è di Hausdorff.*

Dim. Siano $f \neq g : X \to Y$ funzioni continue. Esiste $x \in X$ tale che $f(x) \neq g(x)$. Consideriamo aperti disgiunti U, V con $f(x) \in U$ ed $g(x) \in V$. Segue $M(\{x\}, U) \cap M(\{x\}, V) = \emptyset$. □

Nota 2.10.6. Nei teoremi che seguono faremo uso della caratterizzazione della continuità di una funzione $f : X \to Y$ data in (2.2.25): f è continua se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni $W \in \mathcal{U}_{f(x)}$, esiste $V \in \mathcal{U}_x$ tale che $f(V) \subset W$.

Teorema 2.10.7. *Siano Y e Z spazi topologici, con Y localmente compatto. La funzione (di valutazione)*

$$ev : Y \times \mathbf{Top}(Y,Z) \to Z, \quad (y,f) \mapsto f(y)$$

è continua, essendo $Y \times \mathbf{Top}(Y,Z)$ dotato della topologia prodotto e $\mathbf{Top}(Y,Z)$ della topologia compatta-aperta.

Dim. Sia $(x,f) \in Y \times \mathbf{Top}(Y,Z)$ e sia $U \in Z$ un aperto tale che $f(x) \in U$. $f^{-1}(U)$ è aperto in Y ed essendo Y localmente compatto, esistono un compatto $V \subset Y$ ed un aperto $U' \subset Y$ tale che $x \in U' \subset V \subset f^{-1}(U)$. $U' \times M(V,U)$ è aperto in $X \times \mathbf{Top}(Y,Z)$ e $(x,f) \in U'' \times M(V,U)$. Proviamo che $ev(U' \times M(V,U)) \subset U$. Sia $(x',f') \in U' \times M(V,U)$, allora $x' \in U'$ e poichè $f'(U') \subset f'(V) \subset U$ si ha che $f'(x) \in U$. $\square$

Teorema 2.10.8. *Siano X,Y,Z spazi topologici e sia $f : X \times Y \to Z$ una funzione continua. è allora continua la funzione*

$$\alpha_f : Y \to \mathbf{Top}(X,Z), \quad y \mapsto f_y : X \to Z, \quad f_y(x) = f(x,y).$$

Dim. Sia $y \in Y$ e $M(A,U)$ aperto di $\mathbf{Top}(X,Z)$ contenente f_y. Allora $f(a,y) \in U$ per ogni $a \in A$. Essendo $f^{-1}(U)$ aperto in $X \times Y$, $\{y\} \times A \subset f^{-1}(U)$. Si ha $f^{-1}(U) \cap (X \times A)$ aperto in $X \times A$. Cos $\{y\} \times A \subset f^{-1}(U) \cap (X \times A)$. Poichè A è compatto, segue (2.7.2) che esiste $U' \subset X$ aperto con $x \in U'$ e tale che $U' \times A \subset f^{-1}(U) \cap (X \times A) \subset f^{-1}(U)$. Allora $f(U' \times A) \subset U$, il che equivale a dire $f_{x'}(a) \in U$, per ogni $x' \in U'$. Segue $f_{x'} \in M(A,U)$, cioè $\alpha_f(U') \subset M(A,U)$. $\square$

Teorema 2.10.9. *Siano X,Y,Z spazi topologici e sia Y localmente compatto. Sia $g : X \to \mathbf{Top}(Y,Z)$ continua. Allora la funzione $\beta_g : X \times Y \to Z$ data da $(x,y) \mapsto g(x)(y)$ è continua.*

Dim. Si ha che la funzione β_g è data dalla composizione

$$X \times Y \xrightarrow{g \times id} \mathbf{Top}(Y,Z) \times Y \xrightarrow{\tau} Y \times \mathbf{Top}(Y,Z) \xrightarrow{ev} Z$$

$$(x, y) \mapsto (g(x), y) \mapsto (y, g(x)) \mapsto g(x)(y),$$

cioè $\beta_g = ev \circ \tau \circ (g \times id)$, essendo $\tau : \mathbf{Top}(Y, Z) \times Y \to Y \times \mathbf{Top}(Y, Z)$ la funzione continua di inversione data da $(f, y) \mapsto (y, f)$. La continuità di β_g segue allora dal teorema precedente. □

Corollario 2.10.10. *Sia X localmente compatto, per ogni Y, Z spazi topologici, si ha un omeomorfismo*

$$\alpha_{Y,Z} : \mathbf{Top}(X \times Y, Z) \to \mathbf{Top}(Y, \mathbf{Top}(X, Z)),\ \alpha_{Y,Z}(f) = \alpha_f.$$

Dim. $\alpha_{Y,Z}$ è biiettiva ed ammette come inversa

$$\beta_{Y,Z} : \mathbf{Top}(Y, \mathbf{Top}(X, Z)) \to \mathbf{Top}(X \times Y, Z),\ \beta_{Y,Z}(g) = \beta_g.$$

Si noti che, per ogni altro spazio topologico W, si hanno biiezioni naturali

$$\mathrm{Hom}(W, \mathbf{Top}(X, \mathbf{Top}(Y, Z))) \cong \mathrm{Hom}(W \times X, \mathbf{Top}(Y, Z)) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}(W \times X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(W, \mathbf{Top}(X \times Y, Z))$$

indotte dalle opportune funzioni α e β. Si ricava allora che, per $W = \{*\}$, in base a (2.8.4), si ottiene precisamente la biiezione $\alpha_{Y,Z}$. Inoltre, poichè gli Hom-funtori

$$\mathrm{Hom}(-, \mathbf{Top}(X, \mathbf{Top}(Y, Z))),\ \mathrm{Hom}(-, \mathbf{Top}(X \times Y, Z)) : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$$

sono naturalmente isomorfi, $\alpha_{Y,Z}$ è un omeomorfismo. □

2.11 Spazi compattamente generati. Cg.

Definizione 2.11.1. *Uno spazio di Hausdorff X è* **compattamente generato** *se sono verificate le seguenti condizioni equivalenti:*

- *$F \subset X$ è chiuso se e solo se $F \cap K$ è chiuso in X, per ogni compatto $K \subset X$,*
- *$A \subset X$ è aperto se e solo se $A \cap K$ è aperto in X, per ogni compatto $K \subset X$.*

Denotiamo con **Cg** *la sottocategoria piena di* $\mathbf{Top_2}$ *costituita dagli spazi compattamente generati.*

Lemma 2.11.2. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Se per ogni $A \subset X$ e per ogni $x \in \overline{A}$ esiste un compatto $K \subset X$ per cui $x \in \overline{A \cap K}$, allora $X \in$* **Cg***.*

Dim. Sia $A \subset X$ tale che $A \cap K$ è chiuso in X, per ogni compatto $K \subset X$. Se $x \in \overline{A}$, allora $x \in \overline{A \cap K} = A \cap K$. Segue allora che A è chiuso in X. □

Proposizione 2.11.3. *Ogni spazio di Hausdorff localmente compatto è compattamente generato.*

Dim. Sia X uno spazio localmente compatto, sia $A \subset X$ e sia $a \in A$. Esistono $K \subset X$ un compatto e $U \in \mathcal{U}_a$ tali che $a \in U \subset K$. Allora $A \cap K$ è aperto in K, ma anche $(A \cap K) \cap U$ è aperto in U, quindi in X.

□

Definizione 2.11.4. *Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un sottinsieme $A \subset X$ si dice* **k-chiuso***, risp.* **k-aperto***, se, per ogni spazio compatto di Hausdorff Y e per ogni funzione continua $g : Y \to X$, $g^{-1}(A)$ è chiuso, risp. aperto, in Y.*

Ogni sottinsieme chiuso di X è evidentemente k-chiuso e la famiglia dei k-chiusi di X determina una topologia $k(\tau)$ su X pi? fine di quella data τ. Se indichiamo con kX l'insieme X con la topologia $k(\tau)$, allora la funzione

identica $id : kX \to X$ è continua.
Si noti anche che, per ogni $Y \in \mathbf{Top}$, una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo è continua $f : kX \to Y$.

Proposizione 2.11.5. *Uno spazio topologico X è compattamente generato se e solo se $id : kX \to X$ è un omeomorfismo.*

Dim. Sia X compattamente generato e sia $A \subset X$ k-chiuso. Per ogni compatto K in X, sia $i : K \to X$ l'inclusione. Allora $i^{-1}(A) = K \cap A$ è chiuso in K e quindi in X, essendo X di Hausdorff. L'altra direzione è evidente. $\square$

Lemma 2.11.6. *Sia X un spazio compattamente generato e sia Y uno spazio di Hausdorff. Una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se è continua quando considerata come funzione $f : X \to kY$.*

Dim. Una direzione è evidente. Supponiamo $f : X \to Y$ continua e sia $F \subset Y$ un k-chiuso. Consideriamo un compatto $K \subset X$ con $u : K \to X$ l'inclusione. Allora $f \circ u : K \to Y$ è continua e $u^{-1} \circ f^{-1}(F)$ è chiuso in K, quindi $f^{-1}(F)$ è k-chiuso, cioè chiuso, in X. $\square$

I risultati che che abbiamo esposto sopra conducono alla definizione di un funtore

$$k : \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Cg},$$

$X \mapsto kX,\ f \mapsto kf$, essendo kf la funzione $kf(x) = f(x)$, per ogni $x \in X$.
Sia Y un spazio compattamente generato e sia $g : Y \to X$ un qualunque funzione continua. Dal diagramma

$$\begin{tikzcd} kX \arrow[r, "id"] & X \\ Y \arrow[u, "kg"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

si ricava che $kg = g$ è l'unica funzione continua che lo rende commutativo. Questo fatto stabilisce una biiezione naturale in X, Y

$$\phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}(E(Y), X) \to \mathrm{Hom}(Y, kX)$$

tra gli insiemi di funzioni continue. $E : \mathbf{Cg} \to \mathbf{Top_2}$ denota il funtore di inclusione. In altre parole il funtore $k : \mathbf{Top}_2 \to \mathbf{Cg}$ è aggiunto a destra del funtore di inclusione E, quindi $\mathbf{Cg}$ è una sottocategoria coriflessiva di $\mathbf{Top}_2$ (1.3.1). k si chiama anche funtore di **k-ificazione**, prende uno spazio di Hausdorff e sostituisce la sua topologia con quella dei k-chiusi.

La categoria degli spazi compattamente generati ammette sia limiti che colimiti. In base al Teorema 1.4.19 i limiti in $\mathbf{Cg}$ si ottengono prendendo i limiti in $\mathbf{Top}_2$ e poi applicando il funtore k. Per esempio, se $X, Y \in \mathbf{Cg}$, allora il loro prodotto in $\mathbf{CG}$ è dato da $k(X \times Y) = X \times^k Y$. Da quanto precede si ricava che, per ogni $X, Y, Z \in \mathbf{CG}$ si ha una biiezione naturale

$$\alpha_{Y,Z} : \mathrm{Hom}(X \times^k Y, Z) \to \mathrm{Hom}(Y, k\mathbf{Top}(X, Z)).$$

Ovvero il funtore $X \times^k (-) : \mathbf{Cg} \to \mathbf{Cg}$ è aggiunto a sinistra dell' Hom-funtore $k\mathbf{Top}(X, -) : \mathbf{Cg} \to \mathbf{Cg}$, esibendo $\mathbf{CG}$ come categoria cartesiana chiusa (1.3.(6)). $k\mathbf{Top}(X, Z)$ è la k-ificazione di $\mathbf{Top}(X, Z)$.

2.12 Connessione.

2.12.1 Lemma di incollamento.

È utile avere a disposizione il seguente

Lemma 2.12.1. *Sia X uno spazio topologico e sia $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ un suo ricoprimento aperto, oppure chiuso e finito. Sia poi $\{f_i : U_i \to Y \mid i \in I\}$ una famiglia di funzioni continue con la proprietà che, per $i, j \in I$, si abbia:*

$$U_i \cap U_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad f_i(x) = f_j(x),\ \forall x \in U_i \cap U_j.$$

Allora esiste un'unica funzione continua $f : X \to Y$, tale che $f_{|U_i} = f_i$, $\forall i \in I$.

Dim. Se $x \in X$, allora $x \in U_i$, per qualche $i \in I$. Poniamo $f(x) = f_i(x)$. f è ben definita per ipotesi. Supponiamo che $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ sia un ricoprimento aperto di X: se $V \subset Y$ è un aperto, si ha che

$$f^{-1}(V) \cap U_i = f_i^{-1}(V)$$

è aperto, cos$\frac{1}{2}$ come $\bigcup_{i \in I}(f^{-1}(V) \cap U_i) = f^{-1}(V)$. Quindi f è continua. Analogamente nel caso $\mathcal{U}$ chiuso e finito. □

2.12.2 Spazi Connessi.

Definizione 2.12.2. *Una* **sconnessione** *per uno spazio topologico X è una coppia di aperti non vuoti $H, K \subset X$ tali che*

$$X = H \cup K \quad ed \quad H \cap K = \emptyset.$$

Uno spazio topologico si dice **connesso** *se non ammette sconnessioni.*

Ad esempio:

- ogni spazio discreto con pi? di un punto è sconnesso,
- $[0, 1]$ è connesso.
  Infatti: se H, K fosse una sconnessione per $[0, 1]$ con $1 \in K$, poniamo $s = Sup\ H$. Allora s appartiene ad H oppure a K, che sono aperti, ma ogni intorno di s interseca sia H che K.

2.12.3 Proprietà generali.

(1) La connessione si conserva per immagini continue. In particolare, quozienti di spazi connessi sono connessi,

(2) sottospazi di spazi connessi non sono necessariamente connessi.

(3) La chiusura di un sottospazio connesso è ancora connesso.
Infatti: Se A è connesso in X , supponiamo che $\overline{A} = H \cup K$ sia una sconnessione, allora $A = (A \cap H) \cup (A \cap K)$ è una sconnessione.

(4) se $X_i,\ i \in I$ è una famiglia di spazi connessi con $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$, allora $\bigcup_{i\in I} X_i$ è connesso.
Infatti: se $\bigcup_{i\in I} X_i = H \cup K$ fosse una sconnessione, allora $X_i \subset H$ oppure $X_i \subset K$, per ogni $i \in I$.

Se $x \in X$, la **componente connessa** di x è il pi? grande sottinsieme connesso di X che contiene x: le componenti connesse sono chiuse. Inoltre componenti connesse di punti distinti o coincidono oppure sono disgiunte.
Una componente connessa di X è un sottospazio connesso $C \subset X$ che non è contenuto in altro sottospazio connesso.
Uno spazio topologico è **totalmente sconnesso** se le sue componenti sono i punti.

(5) un prodotto di spazi topologici è connesso se e solo se sono connessi tutti gli spazi fattore.
Infatti : una direzione discende dalla (1). Se $x \in \prod_{i\in I} X_i$, denotiamo con E la componente connessa x. Proviamo che E è denso in $\prod_{i\in I} X_i$ e, pertanto $E = \prod_{i\in I} X_i$. Sia

$$U = \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_{i_n})$$

un aperto basico del prodotto. Per ogni $k = 1, \ldots, n$, fissiamo $b_{i_k} \in U_{i_k}$ e definiamo

$$E_k = \{x \in \prod_{i\in I} X_i \mid x_{i_k} = b_{i_k},\ k = 1, \ldots, n-1,$$

$$x_{i_n} \text{ arbitrario, } x_i = a_i \text{ fisso, altrimenti}\}.$$

Allora ciascun X_{i_k} è omeomorfo a E_k, $E_k \cap E_h = \emptyset$, $h, k = 1, \ldots, n-1$. Allora $F = \bigcup_{k=1}^n E_k$ è connesso.

(6) $\mathbb{R}^n$ è connesso, per ogni $n > 0$.
Scriviamo $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$, quindi l'asserto segue da 2.2(3). $\mathbb{R}^n$ si può pensare come unione di rette (copie di $\mathbb{R}$) per l'origine. L'asserto segue ancora da 2.2(3).

2.12.4 Spazi Connessi per archi.

Sia X uno spazio topologico e $x, y \in X$. Un **cammino**, o anche **arco**, in X da x ad y è una funzione continua $\omega : [0,1] \to X$ tale che $\omega(0) = x$ ed $\omega(1) = y$.

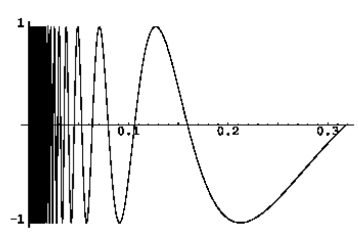
Definizione 2.12.3. *Uno spazio topologico è* **connesso per archi** *se esiste un arco che congiunge qualunque coppia di suoi punti.*
Un **cappio** *in X con punto base x è un arco ω tale che $\omega(0) = \omega(1) = x$.*

Si ha :

- Se X è connesso per archi allora è connesso.
Infatti : la controimmagine di una sconnessione di X sotto un qualunque arco ω sarebbe una sconnesssone per $[0,1]$.

- La cosiddetta "topologist's sin curve" $\mathcal{C}$ è un esempio di spazio connesso ma non connesso per archi.

$$\mathcal{C} : \quad \{(0,x) \mid -1 \le x \le 1\} \cup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x > 0\}$$



Definizione 2.12.4. *Uno spazio topologico è* **localmente connesso (per archi)** *se ogni suo punto ha una base di intorni connessi (per archi).*

Nota 2.12.5. Gli archi si possono sommare, nel senso che segue. Siano

$$\omega : [0,1] \to X,\, \omega(0) = x,\, \omega(1) = y$$

e

$$\omega' : [0,1] \to X,\, \omega(0) = y,\, \omega(1) = z,$$

due archi in X. Allora, in base al Lemma di Incollamento,

$$\omega * \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \omega'(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

è un arco che congiunge x con z.

Proposizione 2.12.6. *Se X è connesso e localmente connesso per archi, allora è connesso per archi.*

Dim. Sia $a \in X$ fissato e sia A l'insieme dei punti di X che sono collegati ad a da un arco. A è non vuoto poichè $a \in A$. Proviamo che esso è contemporaneamente chiuso ed aperto.
A è aperto: se $b \in A$, sia U un suo intorno connesso per archi. Allora $U \subset A$, infatti ogni punto $c \in U$ è collegato da un arco a b, il quale è collegato ad a.
A è chiuso: se $b \in \overline{A}$, sia U un suo intorno connesso per archi. Allora esiste $z \in U \cap A$, cos$\frac{1}{2}$ $b \in A$.
Finalmente $A = X$, poichè altrimenti A ed A^c fornirebbero una sconnessione di X. □

Corollario 2.12.7. *Un sottinsieme aperto e connesso di $\mathbb{R}^n$ è connesso per archi.*

Se si considera il sottospazio di $\mathbb{R}$ dato da $[0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$, questo è un esempio di spazio localmente connesso per archi, ma non connesso.

Proposizione 2.12.8. *Uno spazio X è localmente connesso se e solo se le componenti degli insiemi aperti sono aperte.*

Dim. Sia X localmente connesso e sia $G \subset X$ un aperto. Sia C_x la componente di un punto $x \in G$. Poichè esiste una base di aperti connessi, allora esiste un aperto connesso U con $x \in U \subset C_x$.
Viceversa, basta osservare che le componenti costituiscono una base per la topologia. □

Corollario 2.12.9. *Le componenenti di uno spazio localmente connesso sono chiuse e aperte.*

Corollario 2.12.10. *Le componenenti di uno spazio localmente connesso e compatto sono in numero finito.*

Teorema 2.12.11. *Sia $f : X \to Y$ una funzione quoziente. Se X è localmente connesso anche Y lo è.*

Dim. Sia C una componente di Y. Consideriamo $f^{-1}(C)$ e denotiamo C_x la componente di ogni $x \in f^{-1}(C)$. Allora $f(C_x)$ è connesso e contiene $f(x)$, quindi $f(C_x) \subset C$ e $x \in C_x \subset f^{-1}(C)$. Poichè C_x è aperto, anche $f^{-1}(C)$ è aperto. Poichè f è funzione quoziente, segue che C è aperto in Y. □

Corollario 2.12.12. *Le immagini continue aperte, o chiuse, di uno spazio localmente connesso sono localmente connesse.*

Teorema 2.12.13. *Un prodotto finito di spazi topologici è localmente connesso (per archi) se e solo se ogni spazio fattore è è localmente connesso (per archi).*

2.13 Omotopia.

2.13.1 La relazione di omotopia.

Siano $f, g : X \to Y$ due funzioni continue, **un'omotopia** tra di esse è una funzione continua
$$H : X \times I \to Y$$
che verifica le seguenti richieste per ogni $x \in X$:

- $H(x, 0) = f(x)$,
- $H(x, 1) = g(x)$.

Un'omotopia H tra f e g, scritta anche
$$H : f \simeq g$$
si può riguardare come una famiglia (continua) di funzioni continue
$$\{H_t : X \to Y \mid t \in [0, 1]\},$$
ove
$$H_t(x) = H(x, t), \quad H_0(x) = f(x), \quad H_1(x) = g(x), \quad \forall x \in X,\, t \in I.$$
In altre parole, l'omotopia H permette di "deformare in modo continuo" la funzione continua f nella funzione continua g.
Da notare che avere una famiglia $\{H_t : X \to Y \mid t \in [0, 1]\}$ di funzioni continue non necessariamente implica l'esistenza di una omotopia.

Siano $e_0, e_1 : X \to X \times I$ le funzioni continue definite da
$$e_0(x) = (x, 0) \quad \text{ed} \quad e_1(x) = (x, 1), \quad \forall x \in X.$$
Possiamo allora scrivere che $H : f \simeq g$ se $H \circ e_0 = f$ ed $H \circ e_1 = g$.

Nota 2.13.1. *Sia X uno spazio topologico qualunque. Ogni due funzioni continue $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ sono omotope. Infatti, basta definire l'omotopia $H : X \times I \to \mathbb{R}^n$, ponendo $H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$.*

2.13.2 Propriet? delle omotopie.

(1) *l'omotopia è una relazione di equivalenza in ciascun insieme* $\mathrm{Hom}(X, Y)$. Infatti:

(a) $f \simeq f$, per ogni $f : X \to Y$ mediante l'omotopia costante

$$H(x,t) = f(x),\ \forall x \in X,\ \forall t \in I$$

(b) $f \simeq g \ \Rightarrow\ g \simeq f$, infatti se $H : f \simeq g$ allora la funzione continua

$$H^{-}(x,t) = H(x, 1-t)$$

è un'omotopia che connette g ad f.

(c) $f \simeq g$ e $g \simeq h \ \Rightarrow\ f \simeq h$.
Infatti : se $H, G : X \times I \to Y$ sono due omotopie

$$H : f \simeq g : X \to Y \quad \text{e} \quad G : g \simeq h : X \to Y,$$

si può definire un'omotopia $F : X \times I \to Y$, ponendo

$$F(x,t) = \begin{cases} H(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \\ G(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

tale che $F : f \simeq h$. Si usa scrivere $F = H * G$.

(2) *la relazione di omotopia è* **compositiva** (cfr. Esempi 1.1.2(10)) *nel senso che, date omotopie*

$$H_1 : f_1 \simeq g_1 : X \to Y, \quad H_2 : f_2 \simeq g_2 : Y \to Z,$$

allora c'è un'omotopia $K : f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1$.
Infatti: si ha

$$f_2 \circ H_1 : X \times I \to Z, \quad f_2 \circ H_1 : f_2 \circ f_1 \simeq f_2 \circ g_1,$$

$$H_2 \circ (g_1 \times id) : X \times I \to Z, \quad f_2 \circ H_1 : f_2 \circ g_1 \simeq g_2 \circ g_1,$$

con

$$K = (f_2 \circ H_1) * (H_2 \circ (g_1 \times id)) : f_2 \circ f_1 \simeq g_2 \circ g_1.$$

Nota 2.13.2. *Il Corollario 2.8.10, considerato per spazi arbitrari X e Y e per lo spazio localmente compatto $I = [0,1]$ fornisce una biiezione naturale*

$$\alpha_{X,Y} : \mathrm{Hom}(X \times I, Y) \to \mathrm{Hom}(X, Y^I),$$

ove $Y^I = \mathbf{Top}(I, Y)$.
Denotiamo con $\epsilon_0, \epsilon_1 : Y^I \to Y$ le funzioni continue definite da

$$\epsilon_0(h) = h(0), \quad \epsilon_1(h) = h(1),$$

allora un'omotopia $H : X \times I \to Y$ che connette le funzioni $f, g : X \to Y$ si potrà considerare anche come una funzione continua $\tilde{H} : X \to Y^I$, ove $\tilde{H} = \alpha_{X,Y}(H)$, tale che

$$\epsilon_0 \circ \tilde{H} = f \quad e \quad \epsilon_1 \circ \tilde{H} = g.$$

Infatti $\tilde{H}(x) : I \to Y$ è data da $\tilde{H}(x)(t) = H(x,t)$, per ogni $x \in X$ e $t \in I$.

Denoteremo nel seguito con **HTop** la categoria quoziente di **Top**, rispetto alla relazione di omotopia. Gli oggetti di **HTop** sono quindi tutti gli spazi topologici, mentre un morfismo, scritto $[f] : X \to Y$, è la classe di omotopia della funzione continua $f : X \to Y$. Si usa scrivere

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{HTop}}(X, Y) = [X, Y].$$

C'è un funtore canonico da **Top** nella sua **categoria omotopica HTop**

$$H : \mathbf{Top} \to \mathbf{HTop}, \quad X \mapsto X, \quad f \mapsto [f].$$

Teorema 2.13.3. *Sia X uno spazio topologico, $x, y, z \in X$. Siano ω, ω' archi da x ad y e γ, γ' archi da y ad z. Se $\omega \simeq \omega'$ ed $\gamma \simeq \gamma'$, allora $\omega * \gamma \simeq \omega' * \gamma'$.*

Dim. Siano date omotopie

$$F : \omega \simeq \omega' \quad \text{e} \quad G : \gamma \simeq \gamma'.$$

Definiamo

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s, t), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1, t), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e notiamo che si ottiene una famiglia di archi $H_t : I \to X,\ t \in I$, data da

$$H_t(s) = \begin{cases} F_t(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G_t(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ciascuno dei quali è la composizione di archi $F_t * G_t$.
Allora H è continua per il Lemma di incollamento e si ha

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) = \omega(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,0) = \gamma(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

e

$$H(s,1) = \begin{cases} F(2s,1) = \omega'(2s), & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s-1,1) = \gamma'(2s-1), & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

quindi è un'omotopia $H : \omega * \gamma \simeq \omega' * \gamma'$. □

Definizione 2.13.4. *Due spazi topologici X ed Y sono omotopicamente equivalenti (oppure hanno lo stesso tipo di omotopia) se esistono due funzioni continue*
$f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che

$$g \circ f \simeq id_X \quad ed \quad f \circ g \simeq id_Y.$$

In tal caso f si dice una **equivalenza omotopica** *e g è una sua inversa omotopica. Si noti che, se g_1, g_2 sono entrambe inverse omotopiche di f, allora $g_1 \simeq g_2$. Le equivalenze omotopiche definiscono gli isomorfismi della categoria* **HTop**.
Due spazi topologici hanno lo stesso **tipo di omotopia** *se esiste una equivalenza* Hom*otopica tra di essi. il tipo di omotopia è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi topologici.*
Spazi omeomorfi hanno lo stesso tipo di omotopia.

2.13.3 Omotopia relativa.

Sia $A \subset X$ un sottinisieme di X e $f, g : X \to Y$ due funzioni continue che coincidono su A, ovvero $f(a) = g(a)$, $\forall a \in A$. Un'omotopia $H : f \simeq g$ è una **omotopia relativa** ad A se $H(a,t) = f(a) = g(a)$, $\forall t \in I$, $\forall a \in A$. In questo caso le funzioni continue di deformazione H_t sono tutte stazionarie su A. Si scrive

$$H : f \simeq g, \; rel \; A.$$

Anche l'omotopia relativa è una relazione di equivalenza.

2.13.4 HEP e HLP.

Sia (X, A) una coppia di spazi topologici e denotiamo con $i : A \subset X$ l'immersione.

Definizione 2.13.5. (X, A) *ha la* **proprietà di estensione delle omotopie** *HEP rispetto ad uno spazio* Y *se, data una omotopia* G *che inizia in* $f \circ i$*, esiste una omotopia* H *che inizia in* f *ed estende* G *nel senso che* $H \circ (i \times id) = G$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e_0^A"] \arrow[d, "i"'] & A \times I \arrow[d, "i \times id"'] \arrow[ddr, "G"] & \\
X \arrow[r, "e_0^X"] \arrow[drr, "f"'] & X \times I \arrow[dr, "H"] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

$e_0^X : X \to X \times I$ *è la funzione continua definita da* $e_0^X(x) = (x, 0)$.
Se (X, A) *ha la HEP rispetto a tutti gli spazi topologici, allora il diagramma precedente è un* **push-out debole** *(senza unicità nella proprietà universale). In questo caso* $i : A \to X$ *si chiama una* **cofibrazione di Hurewicz**.

Definizione 2.13.6. *Una funzione continua* $p : E \to B$ *ha la* **proprietà di sollevamento delle omotopie** *HLP rispetto ad uno spazio* Y *se, data una* *omotopia G che inizia in $p \circ g$, esiste una omotopia H che inizia in g e che solleva G, nel senso che $p^I \circ H = G$.*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "H"] \arrow[drr, "G"] \arrow[ddr, "g"'] & & \\
& E^I \arrow[r, "p^I"] \arrow[d, "\epsilon_0^E"] & B^I \arrow[d, "\epsilon_0^B"] \\
& E \arrow[r, "p"] & B
\end{tikzcd}$$

è un pull-back debole (senza unicit? nella propriet? universale), per ogni spazio Y.
QuÏ la funzione continua $p^I : E^I \to B^I$ è data da $p^I(h) = p \circ h$.
Se p ha la HLP rispetto a tutti gli spazi topologici, allora il diagramma precedente è un **pull-back debole** *(senza unicità nella proprietà universale). In questo caso $p : E \to B$ si chiama una* **fibrazione di Hurewicz**.

Un risultato di grande importanza della Topologia Algebrica è il seguente

Teorema 2.13.7. *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua di spazi topologici. Esistono decomposizioni:*

- *$f = p \circ i$, ove i è una cofibrazione e p è una equivalenza omotopica,*
- *$f = p \circ i$, ove i è una equivalenza omotopica e p è una fibrazione.*

Dim. Diamo indicazione solo per la prima affermazione. Si consideri il diagramma di pushout

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "e_0^X"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "\pi_f"] \\
Y \arrow[r, "j_f"] & M(f)
\end{tikzcd}$$

che definisce il cosiddetto **cilindro** (mapping cylinder) **su** f. Poichè è commutativo anche il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e_0^X"] \arrow[d, "f"'] & X \times I \arrow[d, "f \circ \sigma_X"] \\ Y \arrow[r, "1_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

esiste un'unica funzione continua $p_f : M(f) \to Y$ tale che

$$p_f \circ \pi_f = f \circ \sigma_X \quad \text{e} \quad p_f \circ j_f = 1_X.$$

Posto $i_f = \pi_f \circ e_1^X$ si ottiene $f = p_f \circ i_f$. Rimane da provare che i_f è una cofibrazione e p_f è una equivalenza omotopica (esercizio). □

2.13.5 Il gruppoide fondamentale $\Pi(X, Y)$.

Consideriamo l'insieme $\mathrm{Hom}(X, Y)$ delle funzioni continue $X \to Y$. Supponiamo che siano date due omotopie $F, G : X \times I \to Y$

$$F : f \simeq g, \quad G : g \simeq h.$$

Abbiamo già visto che si può ottenere un'omotopia da f a h, ponendo

$$(F * G)(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

Sia ora una terza omotopia $H : h \simeq k : X \to Y$. La costruzione predente fornisce due omotopie

$$(F * G) * H,\ F * (G * H) : f \simeq k.$$

In dettaglio:

$$((F * G) * H)(x, t) = \begin{cases} F(x, 4t), & t \in [0, \frac{1}{4}] \\ \\ G(x, 4t-1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \\ H(x, 2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ed

$$(F*(G*H))(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x,4t-2), & t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ H(x,4t-3), & t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases} ,$$

ovvero le due omotopie composte sono distinte come funzioni, dipendendo tale fatto dalle diverse decomposizioni dell'intervallo I che si adoperano. Quindi la composizione/addizione "*" di omotopie **non** è associativa.

Definiamo ora una funzione continua $\chi : X \times I^2 = (X \times I) \times I \to Y$ nel modo che segue

$$\chi(x,s,t) = \begin{cases} F(x, \frac{4s}{t+1}), & s \in [0, \frac{t+1}{4}] \\ G(x, 4s-t-1), & s \in [\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}] \\ H(x, \frac{4s-t-2}{2-t}), & s \in [\frac{t+2}{4}, 1] \end{cases} .$$

Si ha :

(1) $\chi(x,s,0) = [(F*G)*H](x,s)$,

(2) $\chi(x,s,1) = [F*(G*H)](x,s)$,

(3) $\chi(x,0,t) = f(x), \ \forall\, t \in I$,

(4) $\chi(x,1,t) = k(x), \ \forall\, t \in I$.

Allora: χ è una funzione continua, di fatto una omotopia che collega le funzioni continue, $(F*G)*H, \ F*(G*H) : X \times I \to Y$ e che, inoltre, tiene fisse la funzione iniziale f e quella finale g, nel senso delle (3) e (4) sopra. Abbiamo ottenuto che $(F*G)*H, \ F*(G*H)$ sono omotope, relativamente ad f e g. Quindi

$$[(F*G)*H] = [F*(G*H)],$$

cioè l'operazione "*" è **associativa a meno di omotopia**.

Definizione 2.13.8. *Denoteremo con* $\Pi(X,Y)$ *la categoria piccola avente per oggetti tutte le funzioni continue* $X \to Y$ *e dove un morfismo* $\alpha : f \Rightarrow g : X \to Y$ *è una classe di omotopia (relativa, nel senso detto)* $\alpha = [H]$*, con* $H : f \simeq g$*.*
α *si dice anche un* **track** *da* f *a* g*.*
La composizione in $\Pi(X,Y)$ *è definita come segue: se*

$$\alpha = [H],\, H : f \simeq g : X \to Y, \quad e \quad \beta = [K],\, K : g \simeq h : X \to Y,$$

allora $\beta \circ \alpha = [H * K]$*. Tale composizione è ben definita per quanto sopra.*

Si noti che, se $f : X \to Y$ e 1_f è l'omotopia identica di f allora, ogni track $\alpha = [H] : f \Rightarrow g : X \to Y$ è invertibile con inverso $\alpha^{-1} = [H^-] : f \Rightarrow g : X \to Y$
$\Pi(X,Y)$ è il **gruppoide fondamentale** della coppia X, Y.

È importante notare che l'insieme delle funzioni continue tra due spazi topologici ammette, per quanto visto, una struttura topologica, con la topologia compatta aperta, ed anche una struttura algebrica di gruppoide. Questo fatto lascia intravedere una parte della Matematica molto importante, quella delle "categorie arricchite".

2.13.6 Il gruppo fondamentale $\pi_1(X, x_0)$.

Con le notazioni precedenti: nel caso in cui $X = \{*\}$ sia l'oggetto finale di **Top**, è interessante notare che:

- si ha $\mathbf{Top}(*, Y) \cong Y$. Presi due elementi $x, y : * \to Y$, un'omotopia che li collega è allora un arco $\omega : I = I \times * \to Y$,

- $\Pi(Y) = \Pi(*, Y)$ è **il gruppoide fondamentale** dello spazio Y. I suoi oggetti sono gli elementi di Y ed i suoi morfismi sono i track $[\omega] : x \Rightarrow y$, cioè le classi di omotopia (relativa) di archi con punto iniziale x e punto finale y.

- c'è un **funtore gruppoide fondamentale**

$$\Pi : \mathbf{Top} \to \mathbf{Gpd}, \quad Y \mapsto \Pi(Y),$$

  definito su una funzione continua $f : Y \to Z$ come

$$\Pi(f) : \Pi(Y) \to \Pi(Z), \quad \Pi(f)(x) = f(x), \quad \Pi(f)[\omega] = [f \circ \omega].$$

  Si noti che dalla definizione segue che se $f, g : Y \to Z$ sono due funzioni omotope, allora $\Pi(f) = \Pi(g)$, infatti $[f \circ \omega] = [g \circ \omega]$.

Definizione 2.13.9. *Sia $y_0 \in Y$. Denotiamo con $\pi_1(Y, y_0)$ il sottogruppoide di $\Pi(Y)$ con il solo oggetto y_0.*

Si ha:

- $\pi_1(Y, y_0)$ è un gruppo: il **gruppo fondamentale** o il **primo gruppo di omotopia** di Y, con **punto base** y_0,
- gli elementi sono le classi di omotopia di cappi basati su y_0,
- l'operazione in $\pi_1(Y, y_0)$ è quella data da

$$[\omega] \cdot [\omega'] = [\omega * \omega'].$$

In generale, se y_0 e y_1 sono due punti distinti di Y, i gruppi fondamentali $\pi_1(Y, y_0)$ e $\pi_1(Y, y_1)$ sono pure distinti. Si ha però :

Teorema 2.13.10. *Se Y è connesso per archi $\pi_1(Y, y_0)$ e $\pi_1(Y, y_1)$ sono isomorfi.*

Dim. Sia $\omega : I \to Y$ un arco che collega y_0 con y_1 e sia ω^- l'arco in direzione opposta, cioè $\omega^-(t) = \omega(1-t)$, $\forall\ t \in I$. Se γ è un cappio basato su y_0 si ha che $\omega^- * \gamma * \omega$ è un cappio basato su y_1. Definiamo la funzione

$$A : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1), \quad A([\gamma]) = [\omega^- * \gamma * \omega].$$

- A è ben definita. Segue subito dal Teorema 2.11.3.

- A è un omomorfismo.
  Infatti:
$$A([\gamma]\cdot[\gamma']) = A([\gamma * \gamma']) = [\omega^- * \gamma * \gamma' * \omega] =$$
$$= [\omega^- * \gamma * \omega * \omega^- * \gamma' * \omega] = [\omega^- * \gamma * \omega]\cdot[\omega^- * \gamma' * \omega] =$$
$$= A([\gamma])([\gamma']).$$

- A è biiettiva.
  Infatti: se $\sigma : I \to Y$ è un cappio basato su y_1 allora $\omega * \sigma * \omega^-$ è, a meno di omotopie, l'unico cappio basato su y_0 tale che $A([\omega * \sigma * \omega^-]) = [\sigma]$.

□

Quindi per uno spazio Y connesso per archi si può parlare del suo gruppo fondamentale $\pi_1(Y)$ senza specificare il punto base.

Se (X, x_0) e (Y, y_0) sono due **spazi puntati**, cioè con due punti base selezionati, una funzione continua di spazi puntati $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ è una funzione continua $f : X \to Y$ tale che $f(x_0) = y_0$ (c'è una categoria **Top*** degli spazi puntati e funzioni continue che conservano il punto base). Si estende facilmente al caso di spazi puntati il concetto di equivalenza omotopica. Da notare che una omotopia di funzioni continue di spazi puntati non è altro che un'omotopia relativa al punto base.

Teorema 2.13.11.

(1) *Una funzione continua* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *induce un omomorfismo*
$$\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0).$$

(2) *Se* $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *sono omotope, allora* $\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

Dim.

(1) Se $\gamma : I \to X$ è un cappio basato su x_0, basta porre
$$\pi_1(f)([\gamma]) = [f \circ \gamma].$$

Per provare che $\pi_1(f)$ è un omomorfismo :
siano ω, γ due cappi basati su x_0 e consideriamo $f \circ (\omega * \gamma)$ che è un cappio basato su y_0. Si ha :

$$(f \circ (\omega * \gamma))(t) = \begin{cases} f(\omega(2t)), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(\gamma(2t-1)), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases},$$

pertanto $f \circ (\omega * \gamma) = (f \circ \omega) * (f \circ \gamma)$.

(2) Se f e g sono omotope, allora

$$\pi_1(f)([\gamma]) = [f \circ \gamma] = [g \circ \gamma] = \pi_1(g)([\gamma]).$$

□

Da quanto ora visto si possono trarre le seguenti conseguenze:

- Si è di fatto definito un funtore

$$\pi_1 : \mathbf{Top}^* \to \mathbf{Gr}, \quad (X, x_0) \mapsto \pi_1(X, x_0), \quad f \mapsto \pi_1(f).$$

- *Se (X, x_0) e (Y, y_0) sono omotopicamente equivalenti, i loro gruppi fondamentali sono isomorfi.*

Si noti che π_1 può anche essere considerato come funtore dalla sottocategoria di **Top** degli spazi connessi per archi alla categoria dei gruppi **Gr**.

Definizione 2.13.12. *Uno spazio topologico X si dice* **contraibile** *quando ha il tipo di omotopia di uno spazio puntiforme.*

Poichè uno spazio puntiforme ha gruppo fondamentale banale, lo stesso vale per tutti gli spazi contraibili. Ad esempio il disco D^2 si può contrarre al suo centro, pertanto è $\pi_1(D^2) = \{0\}$. Se però "buchiamo" D^2 al centro si ottiene che lo spazio rimanente è omotopicamente equivalente ad S^1 il quale ha gruppo fondamentale ciclico infinito, cioè $\mathbb{Z}$.

Come applicazione di quanto visto, possiamo affermare che S^1 non è retratto di D^2, cioè non esiste alcuna retrazione $D^2 \to S^1$ (1.1.3). Infatti, se ne esistesse una, diciamo $r : D^2 \to S^1$ si avrebbe

$$\begin{tikzcd} & S^1 \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "id"] & \\ D^2 \arrow[rr, "r"'] & & S^1 \end{tikzcd} \quad \overset{\pi_1}{\Longrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \arrow[dl] \arrow[dr, "id"] & \\ 0 \arrow[rr] & & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

ovvero la commutatività del primo diagramma implicherebbe la commutatività del secondo. In generale S^n non è retratto di D^{n+1}.
Come conseguenza di questo fatto si ottiene il Teorema di punto fisso di Brower:

Teorema 2.13.13. *Ogni funzione continua $f : D^2 \to D^2$ ha un punto fisso, cioè esiste $x \in D^2$ tale che $f(x) = x$.*

Dim. Se $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$, sia $r(x)$ il punto in cui la retta per x ed $f(x)$ interseca S^1. Allora $r : D^2 \to S^1$ sarebbe una retrazione. $\square$

Indice analitico

Indice analitico

BIBLIOGRAFIA

1. R. Brown, *Topology and Groupoids,* https://groupoids.org.uk/pdffiles/topgrpds-e.pdf
2. J. Dugundji, *Topology* (Allyn and Bacon, 1966)
3. H. Herrlich, G. Strecker, *Category Theory* (Allyn and Bacon, Boston, 1973)
4. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician* (Springer, New York, 1998)
5. S. Willard, *General Topology* (Addison-Wesley, 1970)
6. https://ncatlab.org/nlab/show/topology
7. https://ncatlab.org/nlab/show/category+theory